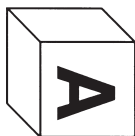


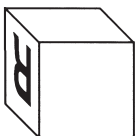
OBSAH

Předmluva	7
1 ÚVOD	8
1.1 Stereometrie	8
1.2 Tělesa	9
1.3 Volné rovnoběžné promítání	11
První výlet do historie geometrie	17
2 POLOHOVÉ VLASTNOSTI	18
2.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami	18
2.2 Vzájemná poloha dvou přímek	22
2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny	25
2.4 Vzájemná poloha dvou rovin	27
2.5 Rovnoběžnost přímek a rovin	29
2.6 Vzájemná poloha tří rovin	34
2.7 Řešení polohových konstrukčních úloh	38
2.8 Úlohy k opakování	54
Druhý výlet do historie geometrie	57
3 METRICKÉ VLASTNOSTI	58
3.1 Odchylka přímek	58
3.2 Kolmost přímek a rovin	63
3.3 Odchylky přímek a rovin	74
3.4 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny	84
3.5 Vzdálenosti přímek a rovin	91
3.6 Úlohy k opakování	100
Třetí výlet do historie geometrie	103

4	ZOBRAZENÍ	104
4.1	Shodné zobrazení v prostoru	104
4.2	Rovinná souměrnost	105
4.3	Středová a osová souměrnost	110
4.4	Otočení a posunutí	114
4.5	Skládání shodných zobrazení	116
4.6	Podobná zobrazení	120
4.7	Úlohy k opakování	121
	Čtvrtý výlet do historie geometrie	122
5	TĚLESA	123
5.1	Mnohostěny	123
5.2	Rotační tělesa	134
5.3	Objem a povrch tělesa	149
5.4	Objem a povrch mnohostěnů	151
5.5	Objem a povrch rotačních těles	166
5.6	Úlohy k opakování	183
	Pátý výlet do historie geometrie	189
	VÝSLEDKY ÚLOH	190
	Seznam používaných symbolů	218
	Doporučená literatura	220
	Rejstřík pojmů	221



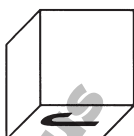
Obr. 2b



Obr. 2c



Obr. 2d



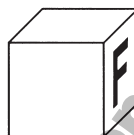
Obr. 2e



Obr. 2f



Obr. 2g



Obr. 2h



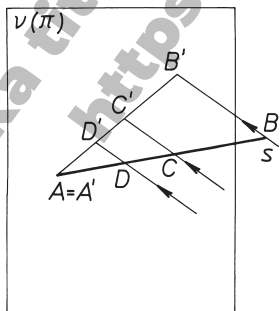
Obr. 2i

1.4 Zhotovte z drátů či špejlí modely krychle, kvádru, pravidelného čtyřstěnu.

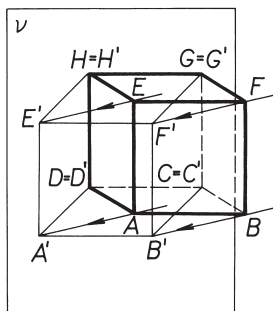
1.3 Volné rovnoběžné promítání

Zobrazovat prostorové útvary do roviny je možné různými způsoby a zabývá se tím **deskriptivní geometrie**. Při řešení jednodušších stereometrických úloh, zejména při zobrazování těles a jejich částí, používáme většinou zobrazení, které se nazývá **volné rovnoběžné promítání**.

Představme si, že $\nu(\pi)$ je svislá (vodorovná) rovina; modelem její části může být např. tabule (sešit). Vezměme špejli, která představuje úsečku s krajními body A, B , a podržme ji před tabulí (nad sešitem) tak, aby se o ni (něj) opírala v krajním bodě A (obr. 3). Veďme druhým krajním bodem B přímkou s tak, aby protínala rovinu $\nu(\pi)$ v bodě B' ($B' \neq A$). Spojnice bodů A, B' v rovině $\nu(\pi)$ je úsečka AB' .



Obr. 3



Obr. 4

Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky CE a roviny BDG .

Řešení (obr. 39)

Jako rovinu σ můžeme volit rovinu ACE . Průsečnice rovin BDG a σ je přímka GS (bod S je střed stěny $ABCD$). Hledaným průsečíkem přímky CE s rovinou BDG je průsečík P přímek CE a GS .

Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice **řezu hranolu**, popř. **jehlanu** se skládá z průníků roviny řezu se stěnami hranolu, popř. jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn.

Pro konstrukci řezů jsou důležité zejména následující věty, přitom první z nich vlastně již znáte (str. 18):

- V1:** Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině (obr. 16).
- V2:** Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách (obr. 36b).
- V3:** Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice (obr. 36e).

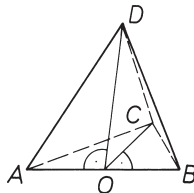
A jaké jsou důsledky těchto vět, které využíváme při konstrukci řezů?

- D1:** Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.
- D2:** Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.
- D3:** Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

V jednoduchých případech, jako jsou v příkladu 1 řezy rovinami ACE a BDG , vystačíme s D1. Většinou však musíme použít i D2, popř. D3. Začneme krychlí.

Příklad 1

Dokažte, že v pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ je $AB \perp CD$.



Obr. 65

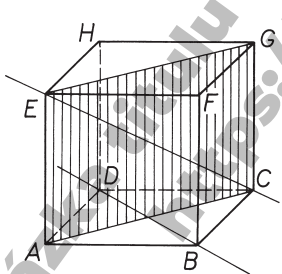
Řešení (obr. 65)

Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou rovnostranné trojúhelníky. Je-li bod O střed hrany AB , jsou úsečky CO a DO výšky v rovnostranných trojúhelnících ABC a ABD . Je proto $CO \perp AB$ a také $DO \perp AB$. Podle kritéria kolmosti přímky a roviny je přímka AB kolmá k rovině CDO . Podle definice je přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny CDO , tedy i k přímce CD . A to jsme měli dokázat.

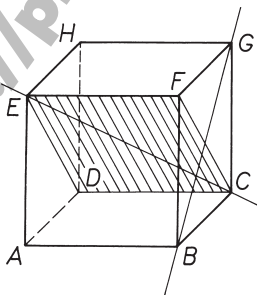
Opakovaným užitím definice a kritéria kolmosti přímky a roviny lze řešit i složitější úlohy.

Příklad 2

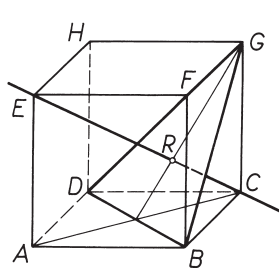
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda přímka CE je kolmá k rovině BDG .



Obr. 66a



Obr. 66b



Obr. 66c

Odchylka přímky a roviny je nejmenší z odchylek této přímky a přímek roviny. A jak tuto nejmenší odchylku najdeme? Řešme následující příklad.

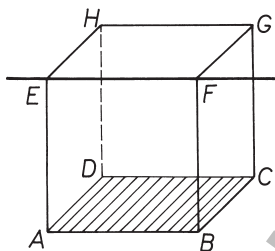
Příklad 2

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku roviny ABC a přímky

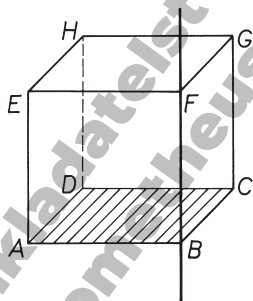
- a) EF , b) BF , c) BH .

Řešení

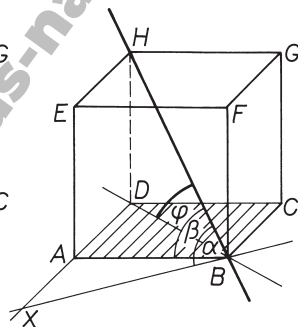
- a) (obr. 87a) Přímka EF je s rovinou ABC rovnoběžná. Odchylka přímky EF a roviny ABC je rovna odchylce přímky EF a např. přímky AB , je tedy 0° .
 b) (obr. 87b) Přímka BF je k rovině ABC kolmá. Je tedy kolmá ke všem přímkám roviny ABC , tj. odchylka přímky BF a libovolné přímky roviny ABC je 90° . Odchylka přímky BF a roviny ABC je proto také 90° .



Obr. 87a



Obr. 87b



Obr. 87c

- c) (obr. 87c) Při hledání odchylky přímky BH a roviny ABC si stačí všimnout těch přímek roviny ABC , které procházejí bodem B . Nejmenší je odchylka přímky BH a přímky BD . Proto je odchylka těchto dvou přímek rovna odchylce přímky BH a roviny ABC .

? Porovnejte odchylky φ , β , α přímky BH a přímek BD , AB , BX (X je libovolný bod přímky AD , $X \neq A$, $X \neq D$). Pracujte s trojúhelníky DBH , ABH a XBH .

Přímka BD z příkladu 2c je pravouhlým průmětem přímky BH do roviny ABC a také přímka AB v příkladu 2a je pravouhlým průmětem přímky EF do roviny ABC .

Příklad 1

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete jeho obraz ve středové souměrnosti $S(S)$, kde $S = V$.

Řešení (obr. 117)

Bod V je v daném zobrazení samodružný, obrazem vrcholů podstavy jsou body A', B', C', D' : bod V je středem úseček AA', BB', CC', DD' . Obrazem jehlanu $ABCDV$ je jehlan $A'B'C'D'V$ shodný s jehlanem $ABCDV$. Těleso s vrcholy $ABCDVA'B'C'D'$ bychom mohli nazvat „dvojjehlán“.

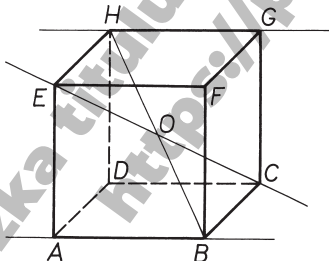
Na obr. 118 je znázorněna krychle $ABCDEFGH$, bod O je střed úsečky BH . Čtýřúhelníky $ABGH, BCHE, DAFG$ jsou obdélníky, a proto je bod O také středem úseček AG, CE, DF . Jsou tedy body E, F, G, H po řadě obrazy bodů C, D, A, B (a naopak) ve středové souměrnosti $S(O)$. Dále vidíme, že např. přímka CE je v $S(O)$ samodružná, samodružná je také rovina ABG . Obrazem přímky AB je přímka HG rovnoběžná s přímkou AB , obrazem roviny ABC je rovina GHE rovnoběžná s rovinou ABC .

Vlastnosti středové souměrnosti, které jsme pozorovali na krychli, můžeme shrnout:

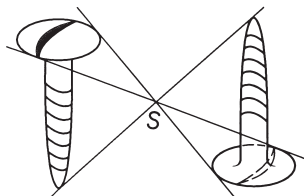
Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed.

Všechny přímky i všechny roviny, které procházejí středem souměrnosti, jsou samodružné.

Obrazem přímky (roviny), která neprochází středem souměrnosti, je přímka (rovina) rovnoběžná.



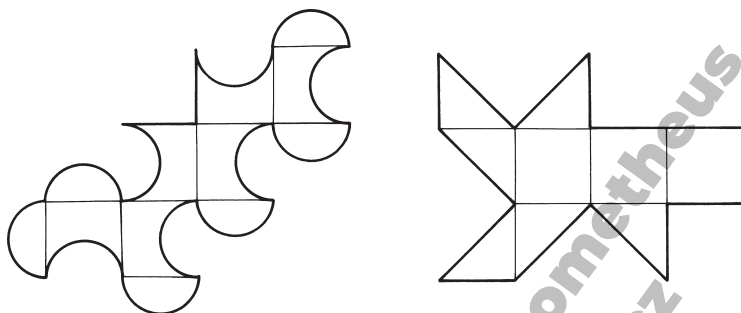
Obr. 118



Obr. 119

Geometrické útvary U a U' , z nichž jeden je obrazem druhého ve středové souměrnosti se středem S , se nazývají útvary souměrně sdružené podle středu S . Je-li $U = U'$, pak říkáme, že **útvary** U je **středově souměrný** podle středu S ; bod S je **střed souměrnosti útvaru** U .

Na obr. 140 jsou „taky sítě“ krychle.



Obr. 140

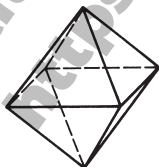
? Načrtněte další sítě krychle, kvádru, pravidelného čtyřstěnu, pravidelného čtyřbokého jehlanu.

Pravidelný mnohostěn (s -stěn) má shodné stěny, kterými jsou pravidelné n -úhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Součet vnitřních úhlů pravidelných n -úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než 360° . Tedy: Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu rovnostranné trojúhelníky (vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost 60°), mohou být u jednoho vrcholu buď tři – **pravidelný čtyřstěn** (tetraedr, obr. 141a), nebo čtyři – **osmistěn** (oktaedr, obr. 141b), nebo pět – **pravidelný dvacetistěn** (ikosaedr, obr. 141c).

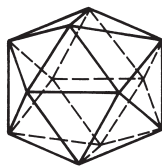
Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu čtverce (vnitřní úhel ve čtverci je pravý), mohou být u jednoho vrcholu pouze tři – **pravidelný šestistěn** neboli **krychle** (hexaedr, obr. 141d). Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu pravidelné pětiúhelníky (velikost vnitřního úhlu v pravidelném pětiúhelníku je 108°), mohou se v jednom vrcholu stýkat pouze tři – **pravidelný dvanáctistěn** (dodekaedr, obr. 141e).



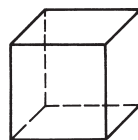
Obr. 141a



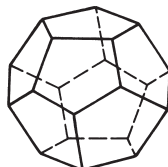
Obr. 141b



Obr. 141c



Obr. 141d



Obr. 141e

Vnitřní úhly pravidelného šestiúhelníku mají velikost 120° , takže žádný pravidelný mnohostěn nemůže mít pravidelné šestiúhelníky jako své stěny. Proto je pravidelných mnohostěnů jen pět. Říkáme jim **Platonova** nebo také **platonská tělesa**.

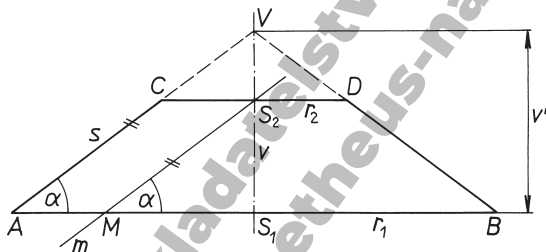
Příklad 4

Je dána výška komolého rotačního kužele $v = 15$ cm, poloměr větší podstavy $r_1 = 32$ cm, délka strany komolého kužele $s = 25$ cm. Vypočtěte

- poloměr r_2 druhé podstavy komolého kužele,
- odchylku α strany komolého kužele a roviny jeho podstavy,
- výšku v' kužele, z něhož komolý kužel vznikl.

Řešení

Označme S_1 střed větší a S_2 střed menší podstavy. Osovým řezem komolého rotačního kužele je rovnoramenný lichoběžník $ABDC$ (obr. 158). V rovině tohoto lichoběžníku budeme provádět všechny další výpočty. Středem S_2 vedeme rovnoběžku m s jedním ramenem, např. AC . Přímka m protne základnu AB v bodě M . Trojúhelník MS_1S_2 je pravoúhlý ($\angle S_1 = 90^\circ$); $r_2 = r_1 - |MS_1|$.



Obr. 158

- a) Pomocí Pythagorovy věty pro $\triangle MS_1S_2$ dostaneme:

$$|MS_1| = \sqrt{|S_2M|^2 - |S_1S_2|^2} = \sqrt{s^2 - v^2}$$

$$\text{tedy } r_2 = r_1 - \sqrt{s^2 - v^2}; r_2 = 12 \text{ cm}$$

- b) Odchylku α strany a roviny podstavy vypočítáme opět z pravoúhlého trojúhelníku MS_1S_2 pomocí funkce sinus:

$$\sin \alpha = \frac{|S_1S_2|}{|S_2M|} = \frac{v}{s}; \alpha \doteq 36^\circ 52'$$

- c) Označme V vrchol kužele, z něhož komolý kužel vznikl. Trojúhelníky AS_1V a MS_1S_2 jsou podobné, proto

$$\frac{|S_1V|}{|AS_1|} = \frac{|S_1S_2|}{|MS_1|},$$

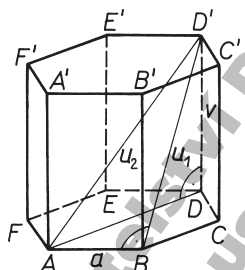
$$\text{neboli } v' = \frac{v \cdot r_1}{\sqrt{s^2 - v^2}}; v' = 24 \text{ cm.}$$

Povrch hranolu určíme podle vzorce $S = 2S_p + S_{pl}$.

Kvádr a krychle jsou zvláštní případy hranolu. **Povrch kváдру** s rozměry a, b, c je $S = 2ab + 2(ac + bc) = 2(ab + ac + bc)$, **povrch krychle** s hranou délky a je $S = 6a^2$.

Příklad 1

Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu, jsou-li dány délky jeho dvou tělesových úhlopříček $u_1 = 12$ cm, $u_2 = 13$ cm, vycházejících z téhož vrcholu.



Obr. 171

Řešení

Pro výpočet objemu a povrchu hranolu potřebujeme znát délku a podstavné hrany a výšku v hranolu. V obr. 171 jsou vyznačeny úhlopříčky BD' (u_1) a AD' (u_2). Trojúhelník ABD' je pravoúhlý ($\sphericalangle B = 90^\circ$). Podle Pythagorovy věty

$$|AB|^2 = |AD'|^2 - |BD'|^2,$$

neboli

$$a^2 = u_2^2 - u_1^2$$

a odtud

$$a = \sqrt{u_2^2 - u_1^2}; \quad a = 5 \text{ cm.}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku ADD' ($\sphericalangle D = 90^\circ$) pak můžeme vypočítat výšku v hranolu:

$$|DD'|^2 = |AD'|^2 - |AD|^2,$$

neboli

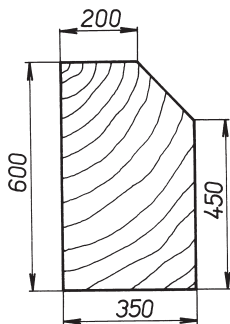
$$v^2 = u_2^2 - (2a)^2.$$

Nahradíme-li a^2 rozdílem $u_2^2 - u_1^2$, dostaneme po úpravě

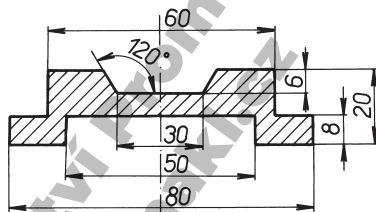
$$v = \sqrt{4u_1^2 - 3u_2^2}; \quad v = \sqrt{69} \text{ cm.}$$

- * **5.51** Podstavami kosého šestibokého hranolu $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ jsou pravidelné šestiúhelníky. Délka podstavné hrany je a , délka boční hrany je b . Boční stěna $BCC'B'$ je obdélník a odchylka rovin BEE' a FCC' je φ ($60^\circ < \varphi \leq 90^\circ$). Určete objem hranolu.

- 5.52** Dřevěný trám jehož průřez je na obr. 180, má objem $V = 1,59 \text{ m}^3$. Vypočítejte délku trámu v metrech, jsou-li údaje na obrázku v mm.



Obr. 180



Obr. 181

- 5.53** Vypočítejte tloušťku ledové kry tvaru hranolu, která vyčnívá 6 cm nad vodou, je-li hustota ledu $\rho = 0,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Předpokládejte, že kra má svislé stěny a rovnoběžné podstavy.
- 5.54** Kolik m^3 zeminy je třeba přemístit při výkopu přímého 170 m dlouhého a 80 cm hlubokého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 90 cm?
- 5.55** Vypočítejte objem železné traverzy, jejíž průřez je na obr. 181 (rozměry jsou v mm) a jejíž délka je 178 mm.
- 5.56** Dřevěný sloup tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky a a výškou v se ohoblováním upraví na sloup, který má tvar pravidelného osmibokého hranolu. O kolik procent se zmenší
a) objem, b) plášť
původního sloupu?
- 5.57** Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, znáte-li:
a) délku a podstavné hrany a délku b boční hrany;
b) délku a podstavné hrany a odchylku φ boční hrany a roviny podstavy.
- 5.58** Síť pravidelného čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník s výškou h . Vypočtete objem a povrch tohoto čtyřstěnu.