Obsah

Předmluva **5**

Přehled základní použité symboliky **6**

1 Základní poznatky z logiky a teorie množin **7**
1.1 Matematická logika . . . 7
1.2 Množiny . . . 30

2 Číselné obory **37**
2.1 Základní aritmetické pojmy . . . 37
2.2 Obor přirozených čísel . . . 40
2.3 Obor celých čísel . . . 47
2.4 Obor racionálních čísel . . . 50
2.5 Obor reálných čísel . . . 56
2.6 Mocniny a odmocniny v oboru reálných čísel . . . 76
2.7 Zlomky . . . 84
2.8 Obor komplexních čísel . . . 91

3 Základní poznatky z algebry **98**
3.1 Mnohočleny . . . 98
3.2 Algebraické výrazy a jejich úpravy . . . 106
3.3 Důkazy algebraických rovností a nerovností . . . 119

4 Funkce **125**
4.1 Základní pojmy . . . 125
4.2 Vlastnosti a druhy funkcí . . . 134
4.3 Elementární funkce . . . 143
4.4 Funkce s absolutními hodnotami . . . 171
4.5 Goniometrické funkce . . . 173
4.6 Užití goniometrických funkcí . . . 185

5 Rovnice a nerovnice **193**
5.1 Rovnice a jejich řešení . . . 193
5.2 Lineární rovnice . . . 198
5.3 Kvadratické rovnice . . . 205
5.4 Iracionální rovnice . . . 213
5.5 Algebraické rovnice vyšších stupňů . . . 216
5.6 Exponenciální a logaritmické rovnice . . . 220
5.7 Goniometrické rovnice . . . 223
5.8 Nerovnice a jejich řešení . . . 230
5.9 Lineární nerovnice . . . 234
5.10 Kvadratické nerovnice . . . 239
5.11 Další druhy nerovnic . . . 243
5.12 Rovnice a soustavy rovnic s více neznámými . . . 252
5.13 Nerovnice a soustavy nerovnic s více neznámými . . . 267
5.14 Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnic a nerovnic . . . 269

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Výsledky **274**
1.1 Matematická logika . . . 274
1.2 Množiny . . . 281
2.1 Základní aritmetické pojmy . . . 284
2.2 Obor přirozených čísel . . . 284
2.3 Obor celých čísel . . . 287
2.4 Obor racionálních čísel . . . 288
2.5 Obor reálných čísel . . . 290
2.6 Mocniny a odmocniny v oboru reálných čísel . . . 301
2.7 Zlomky . . . 303
2.8 Obor komplexních čísel . . . 305
3.1 Mnohočleny . . . 308
3.2 Algebraické výrazy a jejich úpravy . . . 309
3.3 Důkazy algebraických rovností a nerovností . . . 311
4.1 Základní pojmy . . . 315
4.2 Vlastnosti a druhy funkcí . . . 316
4.3 Elementární funkce . . . 321
4.4 Funkce s absolutními hodnotami . . . 334
4.5 Goniometrické funkce . . . 335
4.6 Užití goniometrických funkcí . . . 342
5.1 Rovnice a jejich řešení . . . 346
5.2 Lineární rovnice . . . 346
5.3 Kvadratické rovnice . . . 349
5.4 Iracionální rovnice . . . 352
5.5 Algebraické rovnice vyšších stupňů . . . 352
5.6 Exponenciální a logaritmické rovnice . . . 355
5.7 Goniometrické rovnice . . . 356
5.8 Nerovnice a jejich řešení . . . 360
5.9 Lineární nerovnice . . . 360
5.10 Kvadratické nerovnice . . . 361
5.11 Další druhy nerovnic . . . 362
5.12 Rovnice a soustavy rovnic s více neznámými . . . 364
5.13 Nerovnice a soustavy nerovnic s více neznámými . . . 367
5.14 Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnic a nerovnic . . . 368

Literatura (doporučená a použitá) **371**

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Předmluva

Publikace *Středoškolská matematika v úlohách* je sbírka úloh určená pro procvičování a opakování celého středoškolského učiva matematiky. Obsahuje úlohy na opakování jeho teoretických základů ve formě otázek a odpovědí, řešené příklady i četné úlohy k procvičení s uvedenými výsledky. K části z těchto úloh je připojen návod, jak lze úlohu řešit. Pro některé z úloh výsledková část sbírky obsahuje nejen výsledek, ale i postup řešení. Metodicky řazenou a propracovanou soustavou úloh je čtenář cílevědomě veden k zvládnutí nejdůležitějších pojmů, metod a myšlenkových postupů středoškolské matematiky jak po stránce teoretické, tak i praktické. Sbírka proto může být velmi užitečným doplňkem učebnic matematiky pro gymnázia i pro střední odborné školy. Koncepčně navazuje na knihu téhož autora *Přehled středoškolské matematiky* (jejíž 8. vydání vyšlo v nakl. Prometheus v r. 2003, dotisk v r. 2005). Odkazy na tuto knihu jsou značeny [1].

Sbírku lze používat v průběhu celého středoškolského studia a zejména při přípravě k maturitní zkoušce z matematiky i k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Je určena širokému spektru studentů středních škol všech typů a tomu odpovídá její obsahová náplň. Jsou v ní obsaženy úlohy základní i některé úlohy náročnější (nepřesahující však svou obtížností úroveň středoškolské matematiky). Obsahovou náplní a způsobem zpracování může být sbírka velmi užitečná pro všechny formy samostatného studia. Mohou ji využít také studenti prvních ročníků vysokých škol, především s matematicko-fyzikálním a technickým zaměřením.

Obsahem I. dílu jsou základní poznatky z logiky a teorie množin, číselné obory, základní poznatky z algebry, funkce, rovnice a nerovnice. Obsahem II. dílu jsou posloupnosti a řady, kombinatorika, počet pravděpodobnosti a statistika, matematická analýza, geometrie (planimetrie, stereometrie) a analytická geometrie. II. díl vyšel v r. 1999 v nakl. Prometheus. Odkazy na tuto knihu jsou označeny [2].

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

12. Vypočtěte a výsledek vyjádřete zlomkem v základním tvaru:

a) $\frac{23}{36} - \frac{1}{24}$, b) $\frac{2}{15} - \frac{7}{27}$, c) $\frac{1}{126} - \frac{1}{77} + \frac{5}{132}$.

13. Vypočtěte:

a) $\left(\frac{7}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{8} - \frac{9}{11}\right)$, b) $\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) : \frac{7}{2}$.

14. Vypočtěte:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} + \frac{7}{8} : \frac{5}{6} - \frac{11}{30}$, b) $(-64) \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{7} : \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{9}\right)$.

Poznámka k úlohám 15, 16. Racionální čísla, jejichž absolutní hodnota je větší než 1, se často zapisují ve tvaru tzv. **smíšeného čísla**.

Např. $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$, $\frac{31}{3} = 10 + \frac{1}{3} = 10\frac{1}{3}$.

Obecně: Každé kladné racionální číslo $\frac{p}{q} > 1$ ($p,\ q \in \mathsf{N}$) lze vyjádřit ve tvaru $\frac{p}{q} = n + \frac{r}{q}$, kde $n \in \mathsf{N}$ je celá část čísla $\frac{p}{q}$ a $r \in \mathsf{N}$ je číslo (zbytek) splňující nerovnost $0 \leqq r < q$. Součet $n + \frac{r}{q}$ symbolicky zapisujeme jako smíšené číslo $n\frac{r}{q}$. (Pozor: Tento symbolický zápis nepředstavuje součin!) Obdobně: Každé záporné racionální číslo $\frac{p}{q} < -1$ ($p \in \mathsf{Z}^-,\ q \in \mathsf{N}$) lze zapsat ve tvaru opačného čísla ke smíšenému číslu reprezentujícímu $\left|\frac{p}{q}\right|$. *Např.* $-\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}$, $-\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$.

Při sčítání a násobení smíšených čísel je vyjadřujeme ve tvaru součtu, který reprezentují, nebo je převedeme na zlomky. Při násobení a dělení smíšených čísel se užívá tohoto druhého způsobu.

15. Vypočtěte: a) součet, b) rozdíl, c) součin, d) podíl smíšených čísel $2\frac{5}{6}$, $3\frac{7}{9}$.

16. Vypočtěte:

a) $2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}$, b) $3\frac{1}{2} - 5\frac{1}{6}$, c) $\frac{4}{5} - 5\frac{1}{7}$, d) $3\frac{4}{5} \cdot 2\frac{2}{3}$, e) $2\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$,

f) $3\frac{4}{5} : 2\frac{2}{3}$, g) $\left(1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4}\right) . 3\frac{1}{3}$, h) $\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7}\right) + 7\frac{1}{2}$.

Vyjádření racionálních čísel desetinnými rozvoji a jejich užití

17. Co se rozumí desetinným rozvojem reálného (speciálně racionálního) čísla a?

Odpověď. **Desetinným rozvojem čísla** $a \in \mathsf{R}$ (spec. $a \in \mathsf{Q}$) se nazývá jeho zápis ve tvaru

$$a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots\right),$$

kde $a_0 \in \mathsf{N}_0,\ a_i \in \mathsf{N}_0,\ 0 \leqq a_i \leqq 9$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$); znaménko $+$ se bere pro $a \geqq 0$ a znaménko $-$ pro $a < 0$.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

59. Jaké vlastnosti mají absolutní hodnoty součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou reálných čísel?

Odpověď. Pro každá dvě reálná čísla $a,\ b$ platí:

$$|a| - |b| \leqq ||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Pro každé reálné číslo a a pro každé reálné číslo $b \neq 0$ platí:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

60. Ověřte vlastnosti absolutní hodnoty součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou reálných čísel (viz předchozí úlohu 59) pro dvojice čísel:

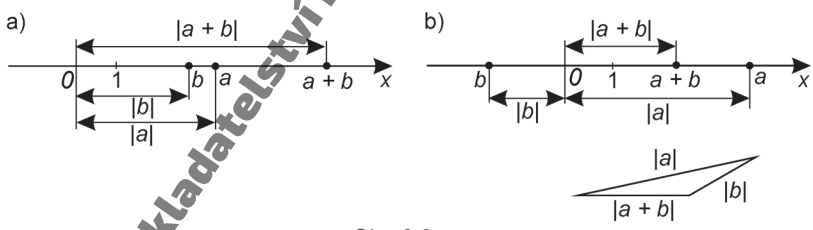
a) $a = 2, \quad b = 5,$ b) $a = -2, \quad b = 5,$
c) $a = 2, \quad b = -5,$ d) $a = -2, \quad b = -5.$

61. Dokažte *větu o absolutní hodnotě součtu dvou reálných čísel*:
Pro každá dvě čísla $a,\ b \in \mathsf{R}$ platí nerovnost

$$|a + b| \leqq |a| + |b|,$$

které se říká **trojúhelníková nerovnost** (pro absolutní hodnoty dvou reálných čísel).

Poznámka. Je-li $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0$, pak je $|a| > 0 \ \wedge \ |b| > 0 \ \wedge |a + b| > 0$, takže nerovnost $|a+b| \leqq |a|+|b|$ lze interpretovat geometricky jako trojúhelníkovou nerovnost pro velikosti úseček (odtud pochází její název). Viz např. obr. 2.8a pro $a > 0,\ b > 0$ (kdy platí rovnost $|a + b| = |a| + |b|$) a obr. 2.8b pro $a > 0,\ b < 0$ (kdy platí ostrá nerovnost $|a + b| < |a| + |b|$).



Obr. 2.8

62. Dokažte *větu o absolutní hodnotě rozdílu dvou reálných čísel*:
Pro každá dvě čísla $a,\ b \in \mathsf{R}$ platí soustava nerovností

$$|a - b| \geqq ||a| - |b|| \geqq |a| - |b|.$$

63. Jaké nerovnosti platí souhrnně pro $|a \pm b|$, kde $a,\ b \in \mathsf{R}$?

Odpověď. Užijeme-li trojúhelníkovou nerovnost $|a + b| \leqq |a| + |b|$ pro čísla a a $-b$, tj. nahradíme-li v ní číslo b číslem $-b$, pak dostaneme: $|a - b| \leqq |a| + |b|$. A obdobně ze soustavy nerovností dokázané v úloze 62 dostáváme $|a + b| \geqq ||a| - |b|| \geqq |a| - |b|$. Souhrnně jsou všechny dokázané nerovnosti vyjádřeny touto soustavou nerovností:

$$|a| - |b| \leqq ||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|.$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Pro určení vztahu mezi základem z, počtem procent p a k němu příslušnou procentovou částí $č$ řešíme úlohu: Pro dané z a p určit příslušné $č$. Tuto úlohu můžeme řešit *úsudkem*:

$$1\ \%\ \text{ze základu } z \text{ je } \frac{1}{100}z \Rightarrow p\ \%\ \text{ze základu } z \text{ je } p \cdot \frac{1}{100}z,$$

což je procentová část $č$ příslušná k počtu procent p, tj. platí

$$č = \frac{pz}{100}.$$

Tento vztah se nazývá *základní vzorec procentového počtu.*

Poznámka. Z tohoto vzorce lze vypočítat kteroukoliv z hodnot $č$, p, z, jsou-li dány zbývající dvě z nich.

22. Vypočtěte 24 % z 1 500 Kč.

Řešení. Dáno $z = 1\,500$ Kč a $p = 24$, určujeme příslušnou hodnotu $č$.

1. způsob řešení – úsudkem (přes 1 % základu):
1 % ze z je 15 Kč $\Rightarrow$ 24 % ze z je $24 \cdot 15$ Kč $= 360$ Kč, tj. $č = 360$ Kč.

2. způsob řešení – přímým užitím základního vzorce procentového počtu (z úlohy 21):

$$č = \frac{24 \cdot 1\,500\ \text{Kč}}{100} = 24 \cdot 15 = 360\ \text{Kč}.$$

Odpověď. 24 % z 1 500 Kč je 360 Kč.

23. Za dopravu a stravování zaplatil účastník jednodenního turistického zájezdu 250 Kč. Kolik procent ceny zájezdu zaplatil za stravu, jestliže doprava stála 110 Kč?

Řešení. Základ pro výpočet procent je $z = 250$ Kč. Za stravu bylo zaplaceno $č = (250 - 110)$ Kč $= 140$ Kč, což je uvažovaná procentová část, jíž odpovídá p % základu z takových, že platí (podle vzorce z úlohy 21):

$$p = \frac{100č}{z} = \frac{100 \cdot 140}{250} = \frac{140}{2{,}5} = 56.$$

Účastník zaplatil tedy za stravu 56 % ceny zájezdu.

24. Ke zkoušce se dostavilo 72 studentů a 46 studentek. Úspěšně ji absolvovalo 63 studentů a 42 studentek. Porovnejte, zda byli u zkoušky úspěšnější studenti nebo studentky.

Řešení. Protože počty studentů a studentek u zkoušky jsou různé ($z_1 = 72$, $z_2 = 46$), je pro porovnání jejich úspěšnosti nutné vypočítat procentové míry (počty procent) p_1, p_2 příslušné procentovým částem rovným počtu úspěšných studentů a studentek ($č_1 = 63$, $č_2 = 42$). Podle základního vzorce procentního počtu z úlohy 21 dostáváme:

$$p_1 = \frac{100č_1}{z_1} = \frac{100 \cdot 63}{72} = 87{,}5; \quad p_2 = \frac{100č_2}{z_2} = \frac{100 \cdot 42}{46} \doteq 91{,}3.$$

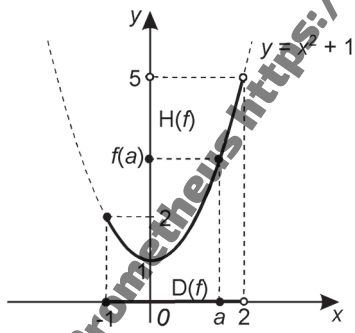
Vychází $p_2 > p_1$, tj. studentky byly u zkoušky úspěšnější než studenti.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1. **Analytické zadání**, tj. vzorcem (rovnicí anebo soustavou rovnic pro různé části definičního oboru $\mathsf{D}(f)$).
2. **Grafické zadání**, tj. grafem funkce f.
3. **Zadání výčtem funkčních hodnot**, tj. jedním z těchto dvou způsobů:
   - zadáním všech uspořádaných dvojic $[x_i,\ y_i]$, kde x_i je hodnota funkční proměnné x a $y_i = f(x_i)$ příslušná funkční hodnota funkce f, při zápisu tohoto výčtu ve tvaru tabulky se mluví o **zadání funkce tabulkou** či **tabelárním zadáním** (tento způsob zadání funkce f lze ovšem užít jen tehdy, když jejím definičním oborem $\mathsf{D}(f)$ je konečná množina),
   - zadáním konstantních funkčních hodnot funkce f v příslušných částech definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ (tento způsob zadání je možné užít tehdy, když oborem funkčních hodnot $\mathsf{H}(f)$ je konečná množina).

Příklady různých způsobů zadání (určení) funkce:

a) *Analyticky zadaná funkce* f: $y = x^2 + 1,\ \mathsf{D}(f) = \langle -1;\ 2\rangle$.
Její graf, který je v obr. 4.1, může sloužit jako *grafické zadání funkce*.

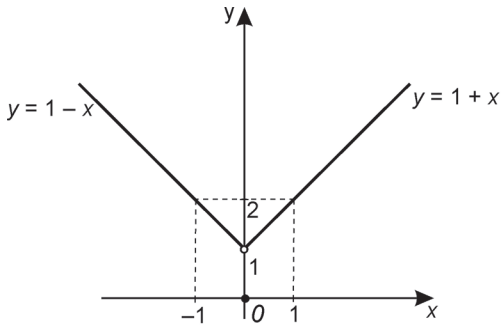


Obr. 4.1

b) *Analyticky zadaná funkce* g: $y = g(x),\ \mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$, jejíž funkční předpis je vyjádřen několika vzorci:

$$y = \begin{cases} 1 + x & \text{pro } x \in (0,\ +\infty), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 - x & \text{pro } x \in (-\infty,\ 0). \end{cases}$$

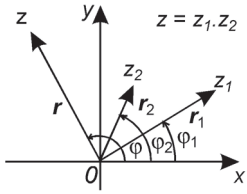
Její graf je v obr. 4.2.



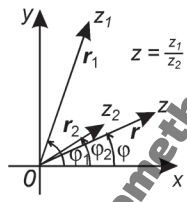
Obr. 4.2

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-pal.cz

Bod Z, který je obrazem součinu z dvou nenulových komplexních čísel z_1, z_2, má polohový vektor (průvodič) $\boldsymbol{r}$, jehož velikost r je rovná součinu velikostí polohových vektorů $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ obrazů čísel z_1, z_2, tj. $r = r_1 \cdot r_2$ a polopřímka OZ (vektor $\boldsymbol{r}$) svírá s poloosou $+x$ orientovaný úhel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, kde φ_1, φ_2 jsou argumenty komplexních čísel z_1, z_2 (obr. 4.61). Obdobná věta platí pro bod Z, který je obrazem podílu z dvou nenulových komplexních čísel z_1, z_2, přičemž $r = \dfrac{r_1}{r_2}$ a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (obr. 4.62).



Obr. 4.61



Obr. 4.62

9. Určete součin a podíl komplexních čísel $z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ a $z_2 = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ v uvedeném pořadí.

10. Co znamená geometricky násobení komplexního čísla $z \neq 0$ imaginární jednotkou i?

11. Vypočtěte součiny komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

a) $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 1{,}5\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

b) $z_1 = 2\,(\cos 36^\circ + \mathrm{i}\,\sin 36^\circ)$, $z_2 = 3\,(\cos 54^\circ + \mathrm{i}\,\sin 54^\circ)$,

c) $z_1 = \cos\dfrac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{2}{3}\pi$, $z_2 = 4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$,

d) $z_1 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{12}$,

$z_3 = \cos\dfrac{\pi}{24} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{24}$.

12. Vypočtěte podíly komplexních čísel v goniometrickém tvaru (v uvedeném pořadí):

a) $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $z_2 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

b) $z_1 = -3$, $z_2 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$,

c) $z_1 = -1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

13. Vypočtěte:

a) $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5}{12}\pi + \mathrm{i}\,\sin\frac{5}{12}\pi\right)}{6\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right)}$,

b) $\dfrac{2\,(\cos 15^\circ + \mathrm{i}\,\sin 15^\circ)\cdot 3\,(\cos 45^\circ + \mathrm{i}\,\sin 45^\circ)\cdot 4\,(\cos 60^\circ + \mathrm{i}\,\sin 60^\circ)}{1{,}5\,(\cos 30^\circ + \mathrm{i}\,\sin 30^\circ)\cdot 0{,}5\,(\cos 150^\circ + \mathrm{i}\,\sin 150^\circ)}$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

18. V oboru R řešte graficky nerovnice:

a) $2^x > 2x$, b) $\log\ |x+1| > x^2 - 3x$.

19. V oboru R řešte rovnice s neznámou x a s kladným parametrem a:

a) $a^{4x} + a^{2x} = a^{6x}$, b) $\log_a x^2 + 2\log_a\ (x+2) = 1$.

[*Návody:* a) Použijte substituci $y = a^{2x}$. b) Upravte danou rovnici na ekvivalentní tvar $\log_a\,[x(x+2)]^2 = 1$ a odlogaritmujte.]

20. V oboru R řešte nerovnice s neznámou x a s kladným parametrem $a \in$ R:

a) $a^{x^2-x} < a^2$, b) $\log_a x + 1 > 2\log_x a$.

[*Návod:* b) Využijte vztahu $\log_a x \cdot \log_x a\ = 1$ a proveďte substituci $y = \log_a x$.]

Goniometrické nerovnice

21. Jak se řeší goniometrické nerovnice?

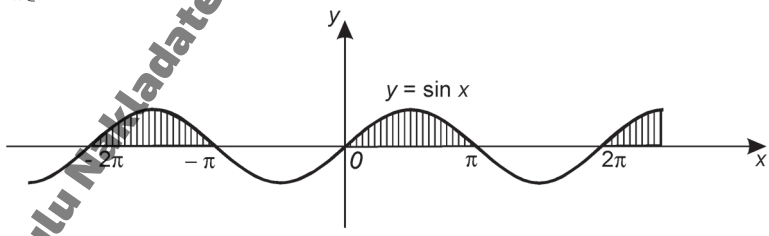
Odpověď. **Řešení goniometrických nerovnic** v oboru R se provádí jejich ekvivalentními úpravami *s využitím vlastností goniometrických funkcí*, a případně pomocí *vhodné substituce.*

22. Řešte v oboru R goniometrické nerovnice:

a) $\sin x > 0$, b) $\cos x < \dfrac{1}{2}$, c) $\operatorname{tg} x \geqq -1$.

Řešení.

a) Z grafického znázornění funkce $y = \sin x$ (obr. 5.13) a její periodicity plyne pro každé $x \in$ R:
$\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (0 + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi) = (2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, kde $k \in$ Z, a tedy
$\mathsf{K} = \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} (2k\pi,\ (2k+1)\pi)$.



Obr. 5.13

b) Sestrojíme grafy funkcí $y = \cos x$ a $y = \dfrac{1}{2}$ (obr. 5.14). Určíme jejich průsečíky pro $x \in (0,\ 2\pi) : x_1 = \dfrac{\pi}{3},\ x_2 = \dfrac{5}{3}\pi$.
Z obr. 5.14 a z periodicity funkce kosinus plyne pro každé $x \in$ R:
$\cos x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi + 2k\pi\right) = \left((6k+1)\dfrac{\pi}{3},\ (6k+5)\dfrac{\pi}{3}\right)$,
kde $k \in$ Z, a tedy $\mathsf{K} = \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \left((6k+1)\dfrac{\pi}{3},\ (6k+5)\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz