OBSAH

Na vysvětlenou ... 6
Úvod ... 8
1 Druhá mocnina ... 10
2 Druhá odmocnina ... 21
Cvičení 1 ... 40
3 Třetí mocnina ... 44
4 Třetí odmocnina ... 51
Cvičení 2 ... 57
5 Vyšší mocniny ... 60
6 Velká a malá čísla ... 66
Cvičení 3 ... 72
7 Mocniny v geometrii ... 74
8 Pythagorova věta ... 86
Cvičení 4 ... 94
9 Číselné výrazy ... 97
Cvičení 5 ... 104
10 Výrazy s proměnnými ... 105
11 Sčítání a odčítání mnohočlenů ... 113
Cvičení 6 ... 119
12 Násobení mnohočlenů ... 122
13 Dělení mnohočlenů jednočleny ... 126
Cvičení 7 ... 129
14 Úlohy z matematické olympiády ... 131
Cvičení 8 ... 136
15 Souhrnná cvičení ... 137
Výsledky průběžných úkolů ... 158
Výsledky cvičení ... 161
Výsledky souhrnných cvičení ... 165

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

ÚVOD

V tomto sešitě nejprve vysvětlíme, jaký význam v matematice mají *mocniny* a *odmocniny* a jak se s nimi prakticky počítá. Přitom se seznámíme s novým druhem čísel, kterým dnes říkáme *iracionální čísla*. Naučíme se používat *Pythagorovu větu* o pravoúhlých trojúhelnících. Začneme také systematicky počítat s *výrazy*, v nichž jsou některá čísla nahrazena *písmeny*. Pootevřeme tak dvířka k jedné z hlavních matematických disciplín, která se nazývá *algebra*. Její hlavní prostředek – symbolické zápisy – jsou dnes nepostradatelné nejen v ostatních matematických odvětvích, ale i v řadě dalších vědeckých oborů, například ve fyzice.

K výpočtům mocnin a odmocnin přivedly matematiky dávných kultur různé geometrické úlohy. Dochoval se nám klínopisný text Babyloňanů starý asi 4 000 let, ve kterém je popsán postup při přibližném odmocňování čísel. V egyptských papyrech byla nalezena speciální značka pro druhou odmocninu. (Naše současná odmocnítka $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, ... vycházejí z návrhu, který se objevil r. 1525 v jedné učebnici algebry. Napsal ji český učitel *Rudolf Krišťan* působící v tehdejší Vídni.)

Na základě Pythagorovy věty dospěli starořečtí matematikové k závěru, že podíl délek některých dvojic úseček nelze vyjádřit žádným zlomkem. Proto je nezbytné zaplnit „mezery“ mezi racionálními čísly novým druhem čísel. Přesná teorie těchto čísel byla završena teprve ve druhé polovině 19. století, jejich název *iracionální čísla* navrhl již v r. 1544 německý matematik *Michael Stifel* (čti štyfel).

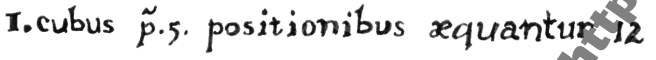
Významným předělem na cestě od výpočtů s konkrétními čísly k symbolickému počítání se stalo dílo *Aritmetika*, které napsal Řek *Diofantos* ve 3. století našeho letopočtu. Jsou v něm mj. poprvé užita písmena k označení neznámých čísel v rovnici. Diofantos také navrhl znaky pro druhou až šestou mocninu čísla, které se však v novověku neujaly. Náš způsob zápisu mocnin a^2, a^3, ... pochází z r. 1637 od francouzského matematika a filozofa *René Descarta* (čti dekárta).

V raném středověku převzali odkaz starořeckých matematiků arabští učenci. Ve vynikající příručce, kterou kolem roku 825 napsal *Muhammad ibn Músá al Chvárizmí*, je podán výklad řešení některých druhů rovnic. Při tom se využívá operace *al–džabr*, která spočívá v přičtení stejné hodnoty

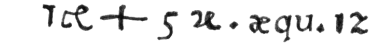
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

k oběma stranám rovnice. Odtud vzniklo slovo *algebra* ve významu nauky o řešení rovnic, tj. hledání neznámých čísel z jejich vztahů k číslům známým.

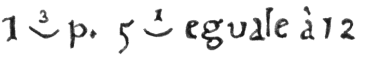
Vývoj algebraické symboliky byl dokončen především v Německu, Itálii a Francii v průběhu 15.–17. století. Teprve tehdy byly slovní výklady početních operací nahrazovány symboly a jejich pořadí určováno závorkami. Znaménka + a − (plus a minus) se poprvé v tištěné podobě objevují r. 1489 v díle *Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce* německého matematika *Johanna Widmanna*, rodáka z Chebu. Patrně nejrozšířenější matematický symbol = (rovnítko) vymyslel r. 1557 anglický lékař a matematik *Robert Recorde* (čti rikord) pro svou učebnici aritmetiky a algebry. Prohlédněte si, jak by se v dílech některých matematiků z 16. a 17. století zapsala rovnice $x^3 + 5x = 12$:



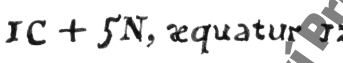
(*G. Cardano*, 1545)



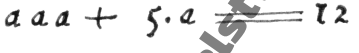
(*M. Stifel*, 1544)



(*R. Bombelli*, 1572)



(*F. Viète*, 1591)



(*T. Harriot*, 1631)

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

n	n^2
0,1	0,01
0,01	0,000 1
0,001	0,000 001
0,000 1	0,000 000 01
$\vdots$	

Nyní už zdůvodníme oba předchozí výsledky:

$$700^2 = (7 \cdot 100)^2 = (7 \cdot 100) \cdot (7 \cdot 100) = 7 \cdot 7 \cdot 100 \cdot 100 =$$
$$= 7^2 \cdot 100^2 = 49 \cdot 10\,000 = 490\,000$$

$$0{,}005^2 = (5 \cdot 0{,}001)^2 = (5 \cdot 0{,}001) \cdot (5 \cdot 0{,}001) = 5 \cdot 5 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}001 =$$
$$= 5^2 \cdot 0{,}001^2 = 25 \cdot 0{,}000\,001 = 0{,}000\,025$$

Tyto podrobné zápisy však zpravidla vynecháváme. Píšeme rovnou:

$$40^2 = 1\,600$$
$$0{,}11^2 = 0{,}012\,1$$
$$1{,}5^2 = 2{,}25$$

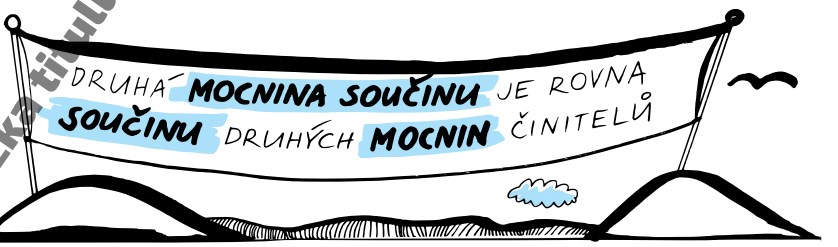
Uvědomte si, že jsme vlastně využili rovností:

$$(4 \cdot 10)^2 = 4^2 \cdot 10^2$$
$$(11 \cdot 0{,}01)^2 = 11^2 \cdot 0{,}01^2$$
$$(15 \cdot 0{,}1)^2 = 15^2 \cdot 0{,}1^2$$

Obecně je můžeme vyjádřit pravidlem

$$\boxed{(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2},$$

které platí pro každá dvě čísla a, b.



Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Jaké vlastnosti má druhá odmocnina?

Naučili jsme se pravidlo pro druhou odmocninu ze *součinu* dvou činitelů. Připomeňte si, že stejné pravidlo platí i pro *druhou mocninu* součinu. V kapitole o druhé mocnině jsme ukázali, že pro druhou mocninu *součtu* a *rozdílu* nic podobného neplatí. Stejná situace je i u druhé odmocniny:

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\sqrt{9+16}} &= \sqrt{25} = \boxed{5} \\ \boxed{\sqrt{9}+\sqrt{16}} &= 3+4 = \boxed{7} \end{aligned}\right\} \quad \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\sqrt{100-64}} &= \sqrt{36} = \boxed{6} \\ \boxed{\sqrt{100}-\sqrt{64}} &= 10-8 = \boxed{2} \end{aligned}\right\} \quad \sqrt{100-64} \neq \sqrt{100}-\sqrt{64}$$

Zbývá nám zjistit, zda lze „po částech“ odmocňovat *podíl* dvou kladných čísel. Následující příklady se zlomky potvrzují, že je to možné:

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\sqrt{\tfrac{4}{36}}} &= \sqrt{\tfrac{1}{9}} = \boxed{\tfrac{1}{3}} \\ \boxed{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}} &= \tfrac{2}{6} = \boxed{\tfrac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \sqrt{\tfrac{4}{36}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}$$

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\sqrt{\tfrac{121}{100}}} &= \sqrt{1{,}21} = \boxed{1{,}1} \\ \boxed{\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}}} &= \tfrac{11}{10} = \boxed{1{,}1} \end{aligned}\right\} \quad \sqrt{\tfrac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}}$$

Vidíme, že druhou odmocninu ze zlomku můžeme vypočítat tak, že druhou odmocninu z čitatele lomíme druhou odmocninou ze jmenovatele.

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Předchozí vzorec platí pro libovolná kladná čísla a, b.

Abychom si byli jisti, že je tomu skutečně tak, musíme ukázat, že druhá mocnina podílu $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ je rovna podílu $a : b$. To ale plyne z pravidla o druhé mocnině podílu:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Podobně bychom mohli zkrátit:

$$\frac{8^5}{8^{12}} = \frac{1}{8^7}\,, \qquad \frac{(-3)^6}{(-3)^8} = \frac{1}{(-3)^2}$$

Ve všech případech je exponent ve jmenovateli výsledného zlomku roven rozdílu exponentů ze jmenovatele a čitatele zlomku původního. Uvědomte si to znovu na příkladu

$$\frac{8^5}{8^{12}} = \frac{1}{8^{12-5}} = \frac{1}{8^7}\,.$$

Pokud tedy přirozená čísla m a n splňují nerovnost $m < n$, pak vzorec

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}}$$

platí pro každé reálné číslo $a \neq 0$.

8. Zkraťte zlomek na základní tvar:

a) $\frac{11^{11}}{11^{12}}$ b) $\frac{7^4 \cdot 7^5}{7^{10}}$ c) $\frac{3^6 \cdot 3^5 \cdot 3^4}{3^{15} \cdot 3^2}$ d) $\frac{10^n}{10^{n+1}}$

□ **9.** Zjistěte, pro která n platí:

a) $\frac{3^4}{3^9} = \frac{1}{3^n}$ b) $\frac{(-5)^n}{(-5)^6} = \frac{1}{(-5)^2}$

c) $\frac{15^{20}}{15^n} = \frac{1}{15^4}$ d) $\frac{1^n}{1^{11}} = 1^2$

10. Petra počítala domácí úkol. Pomozte jí doplnit chybějící výsledky:

$$\frac{2^7}{2^2} = 2^5 \qquad \frac{7^{18}}{7^{10}} = \qquad \frac{(-2)^{13}}{(-2)^5} =$$

$$\frac{3^6}{3^{15}} = \frac{1}{3^9} \qquad \frac{(-4)^6}{(-4)^{12}} = \qquad \frac{9^9}{9^{19}} =$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

? Jak zapisujeme malá čísla?

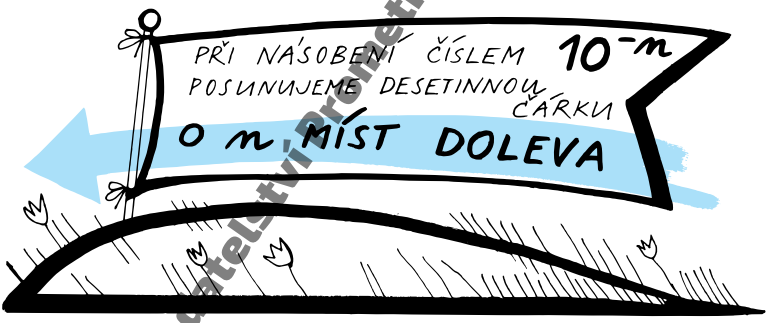
Nejprve vypíšeme, jak vypadají mocniny deseti se *záporným* exponentem:

$$
\begin{aligned}
10^{-1} &= \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1\\
10^{-2} &= \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01\\
10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001\\
10^{-4} &= \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1\\
&\vdots\\
10^{-n} &= \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{100\ldots0}_{n\text{ nul}}} = 0{,}\underbrace{00\ldots01}_{n\text{ míst}}
\end{aligned}
$$

Platí tedy například:

$$
\begin{aligned}
7\cdot10^{-3} &= 7\cdot0{,}001 = 0{,}007\\
12\cdot10^{-6} &= 12\cdot0{,}000\,001 = 0{,}000\,012\\
1{,}6\cdot10^{-4} &= 1{,}6\cdot0{,}000\,1 = 0{,}000\,16
\end{aligned}
$$

Při praktických výpočtech píšeme rovnou výsledek na základě pravidla:



Podívejme se nyní, jak se desetinná čísla s velkým počtem desetinných míst zapisují úsporně:

$$
\begin{aligned}
0{,}000\,4 &= 4\cdot10^{-4}\\
0{,}021 &= 2{,}1\cdot10^{-2}\\
0{,}000\,066 &= 6{,}6\cdot10^{-5}\\
0{,}023\,8 &= 2{,}38\cdot10^{-2}
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že z více možných způsobů zápisu jsme vždy vybrali ten nejobvyklejší. Ihned z něj vidíme, který nejvyšší (desetinný) řád je v daném čísle zastoupen.

ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

11 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ MNOHOČLENŮ

V minulé kapitole jsme podrobně vysvětlili, co jsou mnohočleny. Nyní se budeme věnovat pravidlům pro počítání s nimi. Nejprve vysvětlíme, jak se mnohočleny *sčítají* a *odčítají*.

Jak *sčítáme* mnohočleny?

Na obrázcích si připomeňte, jak se v praxi sčítají věci různého druhu:

3 hrušky + 2 hrušky = 5 hrušek

(3 hrušky + 1 jablko) + 2 hrušky = 5 hrušek + 1 jablko

(3 hrušky + 1 jablko) + (2 hrušky + 2 jablka) = 5 hrušek + 3 jablka

Podobným způsobem postupujeme i u mnohočlenů. „Předměty stejného druhu“, které můžeme sčítat, nám představují ty členy mnohočlenů, které se liší pouze svými koeficienty. Budeme jim říkat *odpovídající si členy*. Odpovídající si členy tedy obsahují stejné proměnné a každou z nich ve stejné mocnině. Například

$$a \quad \text{a} \quad 5a, \qquad 2x^2y \quad \text{a} \quad -x^2y, \qquad pqr \quad \text{a} \quad qrp$$

jsou tři dvojice odpovídajících si členů. V posledním případě jde dokonce o dva stejné členy, i když jsou různě zapsány. Jak víme, násobení je totiž *komutativní* a *asociativní*. Proto platí:

$$pqr = qrp = rpq = prq = rqp = qpr$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz