PŘEDMLUVA

Mladí přátelé,

dostáváte do rukou další díl učebnice matematiky, s níž budete po celý letošní rok pracovat v hodinách matematiky i při své domácí přípravě. Její obsah tvoří analytická geometrie, která je v učebnici rozdělena na dvě části, a to na analytickou geometrii lineárních útvarů a na analytickou geometrii kvadratických útvarů. Při studiu využijete své znalosti nejen z učiva planimetrie, stereometrie, z učiva o řešení rovnic a nerovnic, z učiva o funkcích a jejich vlastnostech, ale i z učiva odborných předmětů, např. z technického kreslení. Dosud pro vás neobvyklým způsobem tak využijete toto zatím odděleně studované učivo v jednom novém celku. Utvrdíte jiným, novým způsobem to, co jste se naučili již dříve.

I v této učebnici jsme použili označení ▼ a ▲ pro prohlubující učivo; obtížnější cvičení mají u čísla cvičení křížek.

Přejeme vám, aby vás práce s touto učebnicí těšila, abyste poznatky z její látky používali s úspěchem i v dalších technických předmětech, a těm z vás, kteří půjdou po maturitě studovat na technické vysoké školy, aby pomohla i tam.

Autoři

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

OBSAH

1 VEKTOROVÁ ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIE 9

1.1 Souřadnice bodů na přímce, v rovině a v prostoru 9
1.2 Vzdálenost dvou bodů 14
1.3 Vektory 21
1.4 Velikost vektoru 26
1.5 Součet vektorů 29
1.6 Opačný vektor 32
1.7 Rozdíl vektorů 33
1.8 Součin vektoru a čísla 35
1.9 Lineární závislost a nezávislost vektorů 37
1.10 Úhel dvou vektorů 40
1.11 Skalární součin dvou vektorů 45
1.12 Kolmost vektorů 48
1.13 Parametrické vyjádření přímky v rovině 50
1.14 Obecná rovnice přímky 53
1.15 Směrnicový tvar rovnice přímky 58
1.16 Vzájemná poloha dvou přímek v rovině 62
1.17 Odchylka dvou přímek. Kolmost dvou přímek 65
1.18 Vzdálenost bodu od přímky v rovině 70
1.19 Parametrické vyjádření přímky v prostoru 73
1.20 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru 76
1.21 Parametrické vyjádření roviny 80
1.22 Obecná rovnice roviny 83
1.23 Zvláštní tvary obecné rovnice roviny 86
1.24 Vzájemná poloha přímky a roviny 92
1.25 Vzájemná poloha dvou rovin 98

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

1.26 Vzdálenost bodu od roviny a od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímek a dvou rovnoběžných rovin, vzdálenost přímky od roviny s přímkou rovnoběžné 100
1.27 Odchylka dvou přímek, odchylka dvou rovin, odchylka přímky od roviny 108

2 ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ V ROVINĚ 115

2.1 Kružnice 115
2.2 Vzájemná poloha přímky a kružnice 122
2.3 Elipsa 126
2.4 Vzájemná poloha přímky a elipsy 135
2.5 Hyperbola 137
2.6 Vzájemná poloha přímky a hyperboly 146
2.7 Rovnoosá hyperbola s asymptotami v osách soustavy souřadnic 153
2.8 Parabola 157
2.9 Vzájemná poloha přímky a paraboly 167

VÝSLEDKY CVIČENÍ 172

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Cvičení

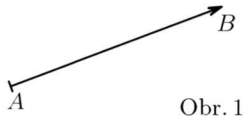
1. Na ose y najděte bod vzdálený od bodu $A[4, -6]$ o délku 5.
2. Bod se přemístil z bodu $A[-1, -3]$ do bodu $B[4, 2]$ po úsečce AB. Jakou vzdálenost překonal?
3. Který z bodů $M[3, 4]$, $N[12, -5]$, $P[7, -24]$, $Q[-6, -8]$ je od počátku O nejdál?
4. Zjistěte délku úsečky AB, která má střed v počátku os souřadnic, je-li $A[6, -2, 3]$.
5. Zjistěte délky stran trojúhelníku ABC, je-li $A[3, 2]$, $B[-1, -1]$, $C[11, -6]$.
6. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý: $A[0, 0]$, $B[3, 1]$, $C[1, 7]$.

+7. Na ose x najděte bod, který je stejně vzdálen od bodů $A[-2, 1, 4]$ a $B[3, 0, 1]$.

1.3 Vektory

V tomto článku začnete pracovat s pojmem vektor. S tímto pojmem jste se setkali již ve fyzice (např. síla, rychlost), kde jste si vektor znázorňovali orientovanou úsečkou. Připomeňme si, že velikost vektoru je rovna délce orientované úsečky, poloha a pořadí krajních bodů určují jeho směr.

Orientovaná úsečka je úsečka, jejíž jeden krajní bod je označen jako počáteční, druhý jako koncový. Graficky znázorňujeme orientovanou úsečku úsečkou se šipkou u koncového bodu. Např. na obr. 1.9 je úsečka daná krajními body A, B orientována tak, že bod A je **počáteční bod**, bod B **koncový bod**; tuto úsečku značíme v tisku polotučnými písmeny $\boldsymbol{AB}$. Splývá-li koncový bod orientované úsečky s jejím počátečním bodem, nazývá se taková orientovaná úsečka **nulová**.



Obr. 1.9

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Z první rovnice je $t = \frac{10}{3}$, z druhé $t = -2$. Tedy neexistuje takové číslo t, které by splňovalo obě rovnice. Bod M na přímce p neleží.

Dosadíme-li do rovnic (3) souřadnice bodu $N\left[-\frac{31}{2}, 0\right]$, dostaneme:

$$\begin{aligned} -\tfrac{31}{2} &= -5 + 3t \\ 0 &= 7 + 2t \end{aligned}$$

Z obou rovnic dostáváme $t = -\frac{7}{2}$. Existuje tedy číslo $t = -\frac{7}{2}$, které vyhovuje oběma rovnicím. Bod N na přímce p leží.

Cvičení

1. Napište parametrické vyjádření přímky určené bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$, je-li dáno:

a) $A[-7, 1]$, $\boldsymbol{u} = (7, 2)$ b) $A[0, 2]$, $\boldsymbol{u} = (-3, 0)$

c) $A[-2, -5]$, $\boldsymbol{u} = (0, 4)$ d) $A[0, 0]$, $\boldsymbol{u} = (2, 0)$

2. Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $M[3, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou AB, kde je $A[0, 7]$, $B[-2, 2]$.

3. Zjistěte, zda dané body leží na přímce p: $x = 1 - t$, $y = 3t$:

a) $A[-3, 7]$ b) $B[0, 3]$ c) $C[-5, 18]$

d) $D[-14, -1]$ e) $E[2, 3]$

4. Napište parametrická vyjádření stran a těžnic trojúhelníku ABC, jestliže je $A[0, 4]$, $B[2, 7]$, $C[5, 1]$.

1.14 Obecná rovnice přímky

Jestliže přímka p je dána bodem $A[x_1, y_1]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, pak ji lze v rovině souřadnic Oxy zapsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_1 + tu_1, \\ y &= y_1 + tu_2, \end{aligned}$$

$t \in \mathsf{R}$ je parametr.

Ukázka titulu jakkdatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Délku v úsečky MN vypočítáme dosazením do vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů $v = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$$v = \sqrt{\frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vzdálenost bodu $M[x_0, y_0]$ od přímky o rovnici $ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce:

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2}$$

Příklad 60

Určete vzdálenost v bodu $A[-1, 1]$ od přímky $q\colon\ 3x - 4y + 5 = 0$.

Řešení. Dosadíme do rovnice (2):

$$v = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

Vzdálenost bodu A od přímky q je $\frac{2}{5}$.

Příklad 61

Na přímce $p\colon\ 4x - 12y - 2 = 0$ najděte bod, který má od přímky $q\colon\ 5x + 12y + 5 = 0$ vzdálenost 3.

Řešení. Hledaný bod označme $M[x_1, y_1]$. Protože bod M leží na přímce p, můžeme psát:

$$4x_1 - 12y_1 - 2 = 0$$

Z toho je:

$$y_1 = \frac{4x_1 - 2}{12} \tag{3}$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Máme-li určit odchylku α přímky p dané parametrickým vyjádřením a roviny ϱ dané obecnou rovnicí, můžeme využít směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ přímky p a normálový vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ roviny ϱ (obr. 1.49). Potom je:

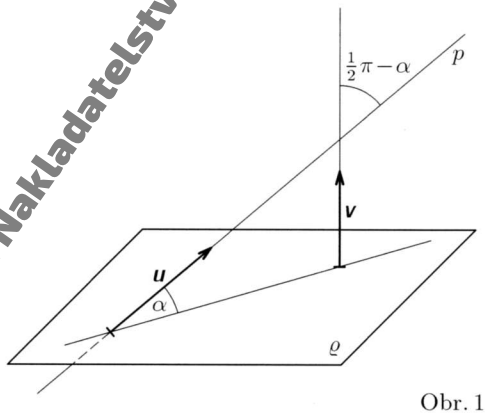
$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} \tag{5}$$

Protože $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\alpha$, můžeme psát:

$$\sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$$

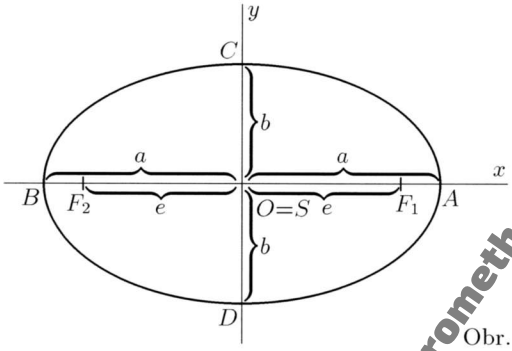
Odchylka α $(0° \leqq \alpha \leqq 90°)$ přímky p se směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a roviny ϱ s normálovým vektorem $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se vypočítá podle vzorce:

$$\sin\alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \tag{6}$$



Obr. 1.49

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz



Obr. 2.4

Úloha 1

Odůvodněte, proč je $a > e$, $a > b$.
[Návod: Definice elipsy, trojúhelníková nerovnost.]

Nejprve odvodíme rovnici elipsy, jejíž hlavní osa splývá s osou x a střed elipsy s počátkem soustavy souřadnic Oxy. Nechť jsou dány dva body F_1, F_2 a číslo $2a$, které je větší než jejich vzdálenost $2e$, tj. $F_1[e, 0]$, $F_2[-e, 0]$.

Označme $X[x, y]$ libovolný bod elipsy. Podle definice elipsy platí pro bod X:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a$$
$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Umocníme:

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$
$$(x+e)^2 - (x-e)^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Po úpravách na levé straně rovnice a dělení rovnice číslem 4 dostaneme:

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Cvičení

1. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a prochází

a) bodem $A[3, 9]$ a je souměrná podle osy x,

b) bodem $B[16, 4]$ a je souměrná podle osy y,

c) bodem $C[-2, -4]$ a je souměrná podle osy x,

d) bodem $D[-3, -5]$ a je souměrná podle osy y.

2. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a prochází body:

a) $A[8, 3]$, $B[8, -3]$ b) $C[-5, 2]$, $D[-5, -2]$

c) $E[4, 1]$, $F[-4, 1]$ d) $G[2, -3]$, $H[-2, -3]$

3. Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a ohniskem:

a) $F[-2, 0]$ b) $F\left[0, \frac{1}{2}\right]$

c) $F[3, 0]$ d) $F\left[0, -\frac{3}{2}\right]$

2.9 Vzájemná poloha přímky a paraboly

Vzájemnou polohu přímky a paraboly zjišťujeme (obdobně jako při zjišťování vzájemné polohy přímky a ostatních kuželoseček) řešením soustavy jejich rovnic. Postupujeme tak, že z rovnice přímky dosazujeme do rovnice paraboly.

Nechť je dána parabola rovnicí $y^2 = 2px$, přímka p parametrickým vyjádřením $x = x_1 + tu_1$, $y = y_1 + tu_2$. Hledáme souřadnice společných bodů přímky a paraboly. Dosadíme za x a y z parametrického vyjádření přímky do rovnice paraboly:

$$(y_1 + tu_2)^2 = 2p(x_1 + tu_1)$$

Dostaneme rovnici o neznámé t:

$$u_2^2 t^2 + 2(y_1 u_2 - pu_1)t + \left(y_1^2 - 2px_1\right) = 0 \qquad (1)$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz