OBSAH

K čemu a pro koho je tento PŘEHLED

PŘEHLED, který máte před sebou,
je přehledně uspořádaný souhrn matematických pojmů, vět a základních postupů řešení úloh, které by měli znát žáci základních škol a nižších tříd víceletých gymnázií.
V některých částech PŘEHLEDU (ale ne často) se objeví i učivo, které je pro žáky ZŠ rozšiřující.

Potřebujete si co nejrychleji připomenout, jak se počítá se zlomky?

Vyhledat potřebné vztahy v učebnici, pokud ji ještě vůbec máte, je někdy dost složité. Hledat ve vlastním sešitě není o mnoho snazší a navíc hrozí nebezpečí, že zapsané poznámky nejsou úplně správné.

A právě proto je zde PŘEHLED. Najdete si podle obsahu článek Zlomky (str. 46) a máte před sebou stručný a srozumitelný přehled základních poznatků o zlomcích i s řešenými ilustračními příklady.

Stejně můžete postupovat, pokud si potřebujete zopakovat kteroukoli část matematiky.

Potřebujete vyřešit úlohu, která vyžaduje znalost vzorce pro objem kužele?

S PŘEHLEDEM je to snadné. Najdete v rejstříku „objem kužele 260“ a na stránce 260 si pod heslem OBJEM KUŽELE vzorec najdete; navíc vám připojený jednoduchý příklad napoví způsob užití vzorce.

PŘEHLED tak plní i důležitou funkci **slovníku** školské matematiky. Díky heslům v rejstříku a na okrajích stránek snadno naleznete potřebné pojmy, vztahy a postupy. Jsou zde uvedeny základní geometrické konstrukce (např. konstrukce tečen z bodu ke kružnici) i nejužívanější aplikace aritmetických a algebraických postupů (např. hledání největšího společného dělitele nebo řešení úloh o pohybu či o společné práci).

PŘEHLED nenahradí učebnice, ale bezpečně pomůže při řešení nejrůznějších problémů.

PŘEHLED vám může hodně pomoci i při opakování větších celků, například **při přípravě k přijímacím zkouškám či v počátcích studia na střední škole**.

Věříme, že se vám s ním bude dobře pracovat.

Autoři

Dělitelnost přirozených čísel

DĚLITEL ČÍSLA

Přirozené číslo b se nazývá *dělitel* přirozeného čísla a, když podíl $a : b$ je přirozené číslo a zbytek je 0:

$$a : b = k, \qquad k \text{ přirozené číslo}$$

Říkáme také, že číslo a je *dělitelné* číslem b.

$21 : 7 = 3$

Číslo 7 **je** dělitelem čísla 21.
Číslo 21 **je** dělitelné sedmi.

$22 : 7 = 3$ (zbytek 1)

Číslo 7 **není** dělitelem čísla 22.
Číslo 22 **není** dělitelné sedmi.

NÁSOBEK ČÍSLA

Přirozené číslo a se nazývá k-*násobek*, stručněji *násobek* přirozeného čísla b, když platí

$$a = k \cdot b,$$

kde k je přirozené číslo.

$15 = 3 \cdot 5$	Číslo 15 je **trojnásobkem** čísla 5.
$70 = 14 \cdot 5$	Číslo 70 je **čtrnáctinásobkem** čísla 5.
$5 = 1 \cdot 5$	Číslo 5 je **jednonásobkem** čísla 5.

Čísla 15, 70 a 5 jsou **násobky** čísla 5.

Číslo b je **dělitelem** čísla a čili $a : b = k$	znamená totéž jako	číslo a je **násobkem** čísla b čili $a = k \cdot b$.

$84 : 7 = 12$ $\qquad$ $84 = 12 \cdot 7$

Číslo 7 je dělitelem čísla 84. Číslo 84 je násobkem čísla 7.

ODČÍTÁNÍ ZLOMKŮ

Příklad

Od zlomku $\frac{3}{4}$ odečteme zlomek $\frac{1}{4}$.

Řešení

Zlomky **se stejnými jmenovateli** *odčítáme* tak, že odečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\underline{\frac{1}{2}}$$

Příklad

Od zlomku $\frac{7}{12}$ odečteme zlomek $\frac{3}{20}$.

Řešení

Převedeme zlomky **na společného jmenovatele** a pak je odečteme:

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{20}=\frac{35}{60}-\frac{9}{60}=\frac{35-9}{60}=\frac{26}{60}=\underline{\frac{13}{30}}$$

NÁSOBENÍ ZLOMKU CELÝM ČÍSLEM

Zlomek násobíme celým číslem tak, že tímto číslem vynásobíme čitatele a jmenovatele opíšeme.

$$\frac{5}{3}\cdot(-4)=\frac{5\cdot(-4)}{3}=-\frac{20}{3}$$

NÁSOBENÍ ZLOMKŮ

Zlomek násobíme zlomkem tak, že vynásobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem.

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 8}=\frac{21}{32}$$

NÁSOBENÍ JEDNOČLENŮ

Při násobení jednočlenů lze jejich koeficienty i proměnné libovolně sdružovat a zaměňovat jejich pořadí.

$$3a^2b \cdot 0{,}4ab^3 = (3 \cdot 0{,}4) \cdot \left(a^2 \cdot a\right) \cdot \left(b \cdot b^3\right) = 1{,}2a^3b^4$$

NÁSOBENÍ MNOHOČLENU JEDNOČLENEM

Mnohočlen násobíme jednočlenem tak, že jednočlenem vynásobíme **každý** člen mnohočlenu (a získaný mnohočlen upravíme).

$$\begin{aligned}\left(7rs^2 + 3r^2s - rs\right) \cdot 2rs^3 &= 7rs^2 \cdot 2rs^3 + 3r^2s \cdot 2rs^3 - rs \cdot 2rs^3 = \\ &= 14r^2s^5 + 6r^3s^4 - 2r^2s^4\end{aligned}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

NÁSOBENÍ MNOHOČLENU MNOHOČLENEM

Mnohočlen násobíme mnohočlenem tak, že **každý** člen prvního mnohočlenu vynásobíme **každým** členem druhého mnohočlenu (a získaný mnohočlen upravíme).

$$\begin{aligned}\left(4x^2 - 2x + 1\right) \cdot (2x + 3) &= 8x^3 - 4x^2 + 2x + 12x^2 - 6x + 3 = \\ &= 8x^3 + 8x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}\left(4x^2 - 2x + 1\right) \cdot (2x + 3) &= 8x^3 + 12x^2 - 4x^2 - 6x + 2x + 3 = \\ &= 8x^3 + 8x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd$$

nebo

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Příklad
Vyřešíme rovnici

$$\frac{x}{x-3} = 1 - \frac{3}{x-2}$$

s neznámou ve jmenovateli.

Řešení
Nejprve určíme podmínky, za kterých mají výrazy tvořící levou a pravou stranu rovnice smysl:

$$x - 3 \neq 0 \quad \text{a} \quad x - 2 \neq 0$$

čili

$$\boxed{x \neq 3 \quad \text{a} \quad x \neq 2.}$$

Číslo 3 ani číslo 2 nemohou být kořeny rovnice.
Zjistíme kořeny rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-3} &= 1 - \frac{3}{x-2} \qquad / \cdot (x-3) \cdot (x-2) \\
x \cdot (x-2) &= (x-3) \cdot (x-2) - 3 \cdot (x-3) \\
x^2 - 2x &= x^2 - 3x - 2x + 6 - 3x + 9 \\
x^2 - 2x &= x^2 - 8x + 15 \\
6x &= 15 \\
\boxed{x = 2{,}5}
\end{aligned}$$

Číslo 2,5 není ani jedno z čísel, která nemohou být kořeny rovnice.
Zkouškou se přesvědčíme, že číslo 2,5 je skutečně kořenem rovnice:

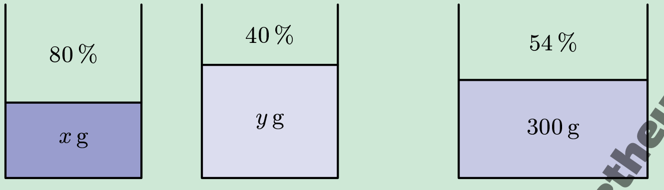
$$\left.\begin{aligned}
L(2{,}5) &= \frac{2{,}5}{2{,}5-3} = -\frac{2{,}5}{0{,}5} = -5 \\
P(2{,}5) &= 1 - \frac{3}{2{,}5-2} = 1 - \frac{3}{0{,}5} = 1 - 6 = -5
\end{aligned}\right\} \quad L(2{,}5) = P(2{,}5)$$

Číslo 2,5 je kořenem dané rovnice.

Při řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli určíme nejdříve **všechny podmínky**, za kterých mají levá a pravá strana rovnice **smysl**.

Řešení 1

Za neznámé zvolíme hmotnosti 80% a 40% vodného roztoku lihu.



hmotnost 80% vodného roztoku lihu . . . . x g

hmotnost lihu v x gramech 80% roztoku . . . . $(0{,}8x)$ g

hmotnost 40% vodného roztoku lihu . . . . y g

hmotnost lihu v y gramech 40% roztoku . . . . $(0{,}4y)$ g

celková hmotnost 54% roztoku . . . . $(x + y)$ g

celková hmotnost 54% roztoku . . . . 300 g

celková hmotnost lihu v 54% roztoku . . . . $(0{,}8x + 0{,}4y)$ g

celková hmotnost lihu v 54% roztoku . . . . $0{,}54 \cdot 300$ g

---

Sestavíme soustavu rovnic s neznámými x, y a vyřešíme ji:

$$\begin{aligned} x + y &= 300 \\ 0{,}8x + 0{,}4y &= 0{,}54 \cdot 300 \end{aligned}$$

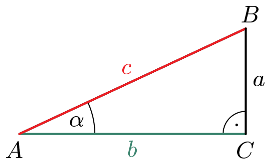
$$\begin{aligned} y &= 300 - x \\ 0{,}8x + 0{,}4 \cdot (300 - x) &= 0{,}54 \cdot 300 \\ 0{,}8x + 120 - 0{,}4x &= 162 \\ 0{,}4x &= 42 \\ x &= 105 \\ y &= 195 \end{aligned}$$

Provedeme zkoušku:

Součet hmotností obou roztoků je 105 g plus 195 g, tj. 300 g.

Hmotnost lihu v 80% roztoku je 84 g $(105 \cdot 0{,}8)$, hmotnost lihu ve 40% roztoku je 78 g $(195 \cdot 0{,}4)$. Celkem je tedy ve 300 g roztoku 162 g lihu;

$\frac{162}{300} \cdot 100 = 54$, vodný roztok lihu je tedy skutečně 54%.



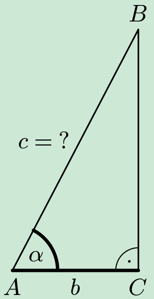
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Každé velikosti ostrého úhlu α $(0° < \alpha < 90°)$ je přiřazena **jediná** hodnota $\cos\alpha$. Tato funkce se nazývá *kosinus*.

Příklad

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je $b = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 62°20'$. Vypočítáme délku přepony c.

Řešení



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

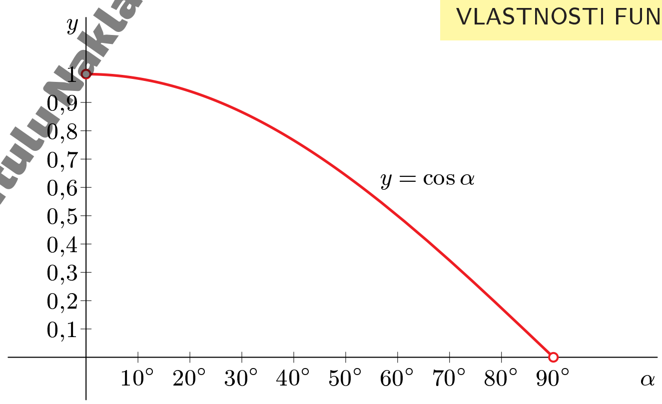
$$c = \frac{12\,\text{cm}}{\cos 62°20'}$$

$$c \doteq \frac{12\,\text{cm}}{0{,}464\,3}$$

$$c \doteq 25{,}8\,\text{cm}$$

Délka přepony c je přibližně 25,8 cm.

GRAF FUNKCE KOSINUS
VLASTNOSTI FUNKCE KOSINUS



ČETNOST, ABSOLUTNÍ ČETNOST

Četnost čili *absolutní četnost* hodnoty znaku se nazývá počet prvků statistického souboru, u kterých sledovaný znak nabývá příslušné hodnoty.

Z 20 žáků, kteří psali písemnou práci z matematiky, obdrželo známku 2 celkem 5 žáků. **Četnost** známky 2 z písemné práce je 5.

RELATIVNÍ ČETNOST

Relativní četnost hodnoty znaku se nazývá podíl absolutní četnosti a rozsahu statistického souboru.

Relativní četnost známky 2 z písemné práce je $\frac{5}{20}$ čili $\frac{1}{4}$.

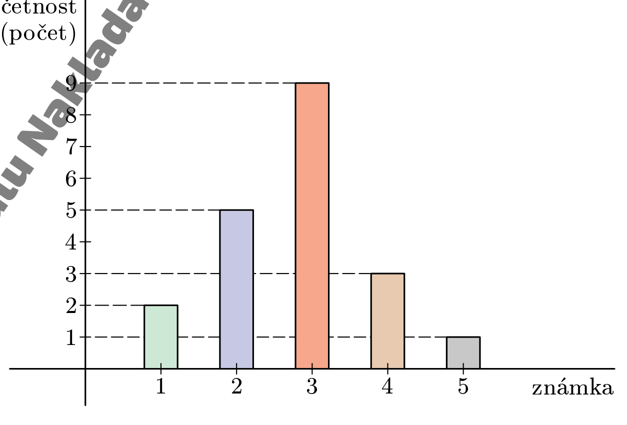
Relativní četnost se často udává **v procentech**.

Relativní četnost známky 2 z písemné práce je 25 %.

SLOUPKOVÝ DIAGRAM
KRUHOVÝ DIAGRAM

Sloupkové diagramy a *kruhové diagramy* patří mezi grafická schémata, pomocí kterých se znázorňuje rozdělení četností a relativních četností hodnot znaků ve statistických souborech.

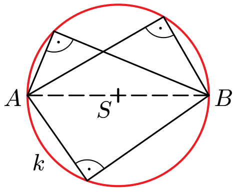
Sloupkový diagram na obrázku znázorňuje rozdělení četností známek z písemné práce, kterou psalo 20 žáků.



THALETOVA KRUŽNICE

Kružnice k z předcházející věty se nazývá *Thaletova kružnice*.

Kružnice k na obrázku je Thaletova kružnice sestrojená nad přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC.

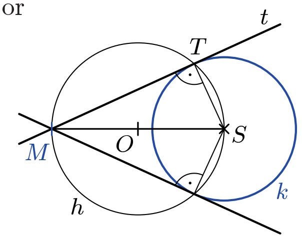


Množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma body A, B, je kružnice k s průměrem AB kromě bodů A, B.

KONSTRUKCE TEČEN Z BODU KE KRUŽNICI

Postup při konstrukci tečen z bodu M ke kružnici $k(S; r)$

Rozbor

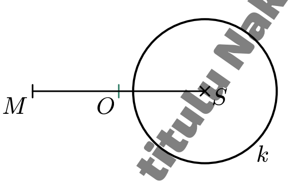


Tečna t kružnice k je kolmá k úsečce ST spojující střed kružnice s bodem dotyku. K sestrojení vrcholu T pravého úhlu MTS využijeme Thaletovu kružnici h.

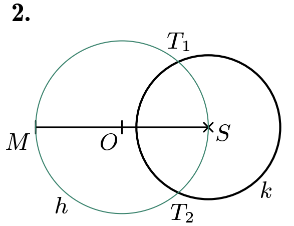
Postup konstrukce

1. Sestrojíme střed O úsečky MS.
2. Nad průměrem MS narýsujeme Thaletovu kružnici $h(O; |OS|)$. Průsečíky T_1 a T_2 kružnic k a h jsou body dotyku obou tečen.
3. Přímky $t_1 = \leftrightarrow MT_1$ a $t_2 = \leftrightarrow MT_2$ jsou tečny kružnice k, které procházejí bodem M.

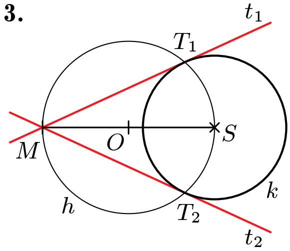
1.



2.



3.



Zkouška

Body T_1 a T_2 leží na kružnici k a na Thaletově kružnici h. Jsou to tedy vrcholy pravých úhlů MT_1S a MT_2S. Proto jsou přímky $t_1 = \leftrightarrow MT_1$ a $t_2 = \leftrightarrow MT_2$ tečny kružnice k.

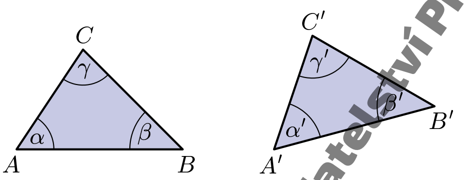
$$\begin{array}{rcrcrcr}
\mathbf{1\,m^2} & = & 0{,}01\,\mathrm{a} & = & 0{,}000\,1\,\mathrm{ha} & = & 0{,}000\,001\,\mathrm{km}^2\\
100\,\mathrm{m}^2 & = & \mathbf{1\,a} & = & 0{,}01\,\mathrm{ha} & = & 0{,}000\,1\,\mathrm{km}^2\\
10\,000\,\mathrm{m}^2 & = & 100\,\mathrm{a} & = & \mathbf{1\,ha} & = & 0{,}01\,\mathrm{km}^2\\
1\,000\,000\,\mathrm{m}^2 & = & 10\,000\,\mathrm{a} & = & 100\,\mathrm{ha} & = & \mathbf{1\,km^2}
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mm}^2 \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{cm}^2 \arrow[l, bend left, "\cdot 100"] \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{dm}^2 \arrow[l, bend left, "\cdot 100"] \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{m}^2 \arrow[l, bend left, "\cdot 100"] \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{a} \arrow[l, bend left, "\cdot 100"] \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{ha} \arrow[l, bend left, "\cdot 100"] \arrow[r, bend left, ": 100"] & \mathrm{km}^2 \arrow[l, bend left, "\cdot 100"]
\end{tikzcd}$$

$$38\,245\,\mathrm{mm}^2 = 382{,}45\,\mathrm{cm}^2 = 3{,}824\,5\,\mathrm{dm}^2 = 0{,}038\,245\,\mathrm{m}^2$$
$$2{,}453\,8\,\mathrm{km}^2 = 245{,}38\,\mathrm{ha} = 24\,538\,\mathrm{a} = 2\,453\,800\,\mathrm{m}^2$$

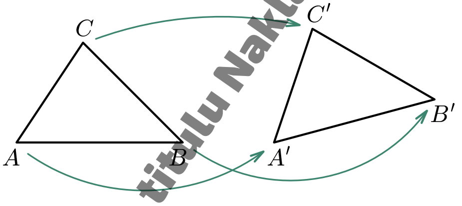
SHODNÉ TROJÚHELNÍKY

Shodné trojúhelníky se nazývají takové trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách a ve všech třech vnitřních úhlech.



Pro shodné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ platí

$$AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C', \quad CA \cong C'A',$$
$$\alpha \cong \alpha', \quad \beta \cong \beta', \quad \gamma \cong \gamma'.$$

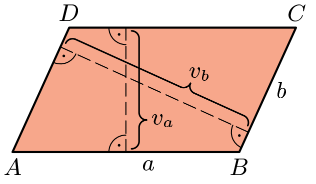


$$\triangle ABC \;\cong\; \triangle A'B'C'$$

Značíme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Body, které si ve shodných trojúhelnících ABC, $A'B'C'$ odpovídají, jsou na obou stranách zápisu $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ zapsány na stejných místech.

OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU



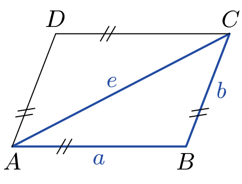
Obsah S rovnoběžníku je součin délky strany a výšky k této straně.

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

KONSTRUKCE ROVNOBĚŽNÍKŮ

Konstrukce rovnoběžníku zadaného délkami sousedních stran a délkou úhlopříčky

Rozbor



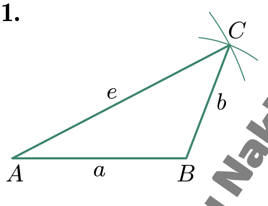
Dáno a, b, $e = |AC|$.

Zadáním je určen trojúhelník ABC, k dokončení konstrukce využijeme rovnoběžnost protějších stran.

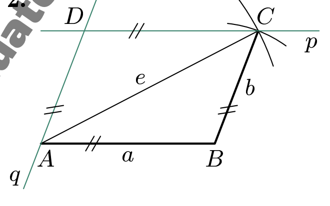
Postup konstrukce

1. Sestrojíme trojúhelník ABC určený délkami stran.
2. Vrcholem C vedeme přímku p rovnoběžnou s úsečkou AB, vrcholem A vedeme přímku q rovnoběžnou s úsečkou BC. Průsečík přímek p a q označíme D.
3. Sestrojíme rovnoběžník $ABCD$.

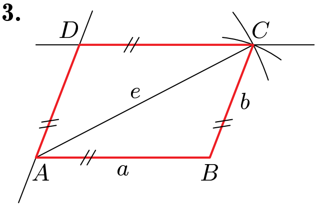
1.



2.



3.



Zkouška

$CD \parallel AB$, $AD \parallel BC$, proto je $ABCD$ rovnoběžník.
$|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = e$, a proto odpovídá tento rovnoběžník zadání.

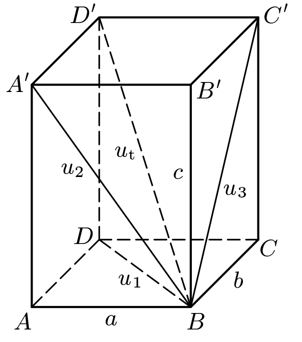
Diskuze

Rovnoběžník lze sestrojit, splňují-li délky úseček a, b, e trojúhelníkové nerovnosti.

KVÁDR

Kvádr se nazývá hranol, jehož podstava je obdélník, nebo čtverec.

Kvádr je čtyřboký hranol, protější stěny kvádru jsou shodné obdélníky, nebo čtverce.



$ABCDA'B'C'D'$ je kvádr.

ROZMĚRY KVÁDRU

Délky a, b, c tří hran vycházejících z téhož vrcholu jsou *rozměry kvádru*.

DÉLKY ÚHLOPŘÍČEK KVÁDRU

Pro délky u_1, u_2, u_3 *stěnových úhlopříček kvádru* platí

$$u_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad u_2 = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad u_3 = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

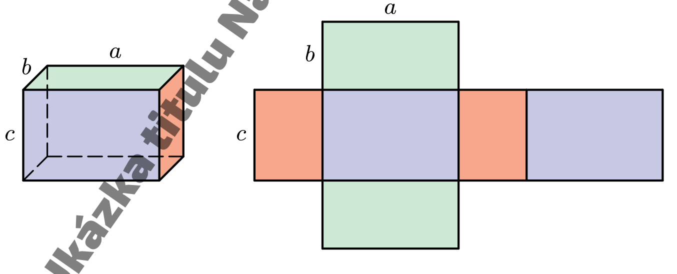
Stěnové úhlopříčky v protějších stěnách kvádru mají stejnou délku.

Pro délku u_t *tělesové úhlopříčky* zobrazeného *kvádru* platí

$$u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Všechny tělesové úhlopříčky kvádru mají stejnou délku.

SÍŤ KVÁDRU



Síť kvádru se skládá ze všech jeho **šesti** stěn, každá z nich je obdélník, nebo čtverec.