OBSAH

PŘEDMLUVA

Milí studenti,
vážení kolegové, učitelé matematiky,

cílem *Sbírky úloh z matematiky* je usnadnit studentům středních škol přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.

Sbírka je členěna do čtyř kapitol.

První kapitola obsahuje stručný výčet nedostatků ve znalostech studentů, se kterými se setkáváme na středních školách, u přijímacích zkoušek na vysoké školy a stejně tak na začátku vysokoškolského studia.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny řešené příklady a neřešené úlohy, obsahově sestavené do deseti tematických celků středoškolské matematiky. Protože většina studentů pravděpodobně nemá průběžně během středoškolského studia k dispozici učebnice, jsou na začátku každého tematického celku uvedeny základní definice, vzorce, věty, vztahy a vlastnosti pojmů, které je nutné znát k vyřešení uvedených příkladů a úloh. Vzorově řešené příklady mají studentům ukázat, jak řešit úlohu po stránce obsahové i formální. Je skutečně velmi žádoucí dbát při řešení úlohy nejen na správnost řešení, ale i na zápisy řešení úlohy. Velmi často se u studentů setkáváme s nepřehlednými zápisy. Je chybou nás učitelů, že velmi málo či nedůsledně vyžadujeme, aby řešení úloh byla přehledná, úplná. V první řadě však tento požadavek musíme plnit my učitelé, a potom jeho plnění můžeme vyžadovat i od studentů. Téměř za všemi úlohami jsou v hranatých závorkách uvedeny výsledky, případně i dílčí návody k řešení či mezivýsledky. Obsahově je náplň příkladů a úloh čerpána z učebnic a sbírek pro střední i vysoké školy a ze zdrojů vlastních. Kapitola obsahuje i úlohy, které jsou ve srovnání s úlohami některých zadání písemných přijímacích zkoušek asi náročnější. Jsem přesvědčen, že ve většině případů nutně musí uchazeč o vysokoškolské studium znát více, než se požaduje v přijímacím řízení na vysoké školy. Obtížnější úlohy jsou před číslem úlohy označeny hvězdičkou.

V posledních letech přibývá počet vysokých škol, které v přijímací písemné zkoušce z matematiky předkládají uchazečům úlohy uzavřené (úlohy s nabídnutou volbou několika výsledků, přičemž vždy právě jeden nabídnutý výsledek je řešením úlohy) nebo kombinaci úloh uzavřených a úloh otevřených (úloh bez nabídnuté volby výsledku). I písemná část nové maturitní zkoušky bude s největší pravděpodobností obsahovat úlohy uzavřené i úlohy otevřené. Proto jsou uzavřené úlohy zařazeny i do této *Sbírky*. Najdete je ve třetí kapitole.

Ve čtvrté kapitole je uvedeno dvacet písemných zkoušek, které byly v rámci přijímacího řízení zadány v posledních letech na některých vysokých školách. Každé toto zadání písemné zkoušky obsahuje též výsledky jednotlivých úloh.

Upřímně děkuji RNDr. Dagu Hrubému a RNDr. Jurovi Charvátovi, CSc., za mnoho konkrétních připomínek k obsahu *Sbírky*. Kolegovi Charvátovi děkuji i za precizní revizi řešení příkladů a výsledků úloh. Nakladatelství Prometheus děkuji za vydání *Sbírky*.

V poslední době se objevuje mnoho oprávněných připomínek ke kvalitě matematických znalostí absolventů středních škol. Studenti, studium matematiky vyžaduje pravidelnou přípravu, potřebnou vůli a zodpovědnost. Kolegové, na Vás se obracím slovy prof. RNDr. Pavla Drábka, DrSc., ze ZU Plzeň, která pronesl na jedné pardubické konferenci: „... dobrým učitelem se člověk nestává tím, že prostuduje štos metodických traktátů. Dobrý učitel se pozná podle toho, že svému předmětu hluboce rozumí, má jej rád a rád jej také učí. Tyto vlastnosti dokáží studenti a žáci velmi rychle rozpoznat a jen takový učitel je pak dokáže správně motivovat a pro svůj předmět získat. A právě to by mělo být cílem našeho snažení ...“

Vám, milí studenti, i Vám, vážení kolegové, přeji, abychom společným úsilím, podloženým svědomitou a důslednou přípravou a kvalitní výukou, přispěli k potřebnému zvyšování úrovně matematického vzdělávání na všech typech škol. Nechť Vám matematika přináší též hodně radosti a Vaše výsledky Vám dají pocit oprávněného uspokojení. Byl bych rád, kdyby i tato *Sbírka* Vám byla k tomu nápomocná.

Listopad 2004 RNDr. Josef Kubát

S rozkoší užíváme matematiky a děje se nám
jako Lotofágům, neboť okusivše ji,
nechceme se jí již vzdát a ovládá nás jako květ lotosu.

Aristoteles ze Stageiry (384 – 322 př. n. l.)

Pravidla pro počítání s odmocninami $(a, b \in \mathsf{R},\ m, n, k \in \mathsf{N})$

1.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geqq 0,\ b \geqq 0$	Odmocniny se stejnými odmocniteli násobíme tak, že součin základů odmocníme společným odmocnitelem.
2.	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a \geqq 0,\ b > 0$	Odmocniny se stejnými odmocniteli dělíme tak, že podíl základů odmocníme společným odmocnitelem.
3.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geqq 0$	Odmocninu umocníme tak, že umocníme základ a získanou mocninu odmocníme.
4.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $a \geqq 0$	Odmocninu odmocníme tak, že její základ odmocníme součinem odmocnitelů.
5.	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, $a \geqq 0$	Odmocnina se nezmění, jestliže její základ umocněný přirozeným číslem odmocníme součinem tohoto přirozeného čísla a jejího odmocnitele.

Pro každé reálné číslo $a > 0$ a pro libovolná čísla $m \in \mathsf{Z}$ a $n \in \mathsf{N}$ je definováno:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Mocnina a^x se pro $a > 0$ definuje i tehdy, je-li x libovolné reálné číslo.

Řešené příklady

Příklad 1

a) Vypočtěte $\sqrt{15}\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}-1\right)^2+\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

b) Upravte $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$.

c) Vypočtěte $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^2} : \dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}$.

Řešení

a) Provedeme roznásobení, umocnění dvojčlenů a částečné odmocnění:

$$\begin{aligned}\sqrt{15}\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}-1\right)^2+\left(1+\sqrt{5}\right)^2 &=\\ &= 5\sqrt{3}-6\sqrt{5}-12+4\sqrt{3}-1+1+2\sqrt{5}+5=\\ &= 9\sqrt{3}-4\sqrt{5}-7\end{aligned}$$

b) Zlomek rozšíříme výrazem $3\sqrt{2}+4$:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)}{\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)}=\frac{9\sqrt{2}+12-12-8\sqrt{2}}{9\cdot 2-16}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Použijeme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami se stejnými základy:

$$\begin{aligned}\frac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^2} : \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}} &= \frac{\left(5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)^2}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}=\\ &= \frac{5^{-1}\cdot 2^{-1}\cdot 2^{\frac{9}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 5^{-1-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1+\frac{9}{2}+\frac{1}{6}-1}=\\ &= 5^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{8}{3}}=\frac{2^{\frac{8}{3}}}{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{5\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

Poznámky

1. Pokyn „Vypočtěte“, popř. „Upravte“ znamená přepsat daný výraz v co nejjednodušším tvaru (např. zlomkem v základním tvaru).
2. Při úpravě výrazu je vždy součástí řešení úlohy stanovení podmínek, za kterých je daný výraz definován a roven výslednému výrazu.

Úlohy

1. Vypočtěte:

a) $5\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 7\sqrt{45} + \sqrt{180}$

b) $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 - \left(-1 + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{8}$

c) $4\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \left(3 - \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{75}$

d) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{60} - 17$

[a) $22\sqrt{5}$; b) $5 - 10\sqrt{2}$; c) $12 - 14\sqrt{3}$; d) 0]

2. Upravte (odstraňte odmocniny ze jmenovatelů):

a) $\dfrac{5\sqrt{2} - 2}{3 + \sqrt{2}}$

b) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{3}} \cdot \left(3 - 2\sqrt{3}\right)^{-1}$

c) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right)^2$

d) $\dfrac{2\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

[a) $\dfrac{17\sqrt{2} - 16}{7}$; b) $3 + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; c) $\dfrac{9(3 + 2\sqrt{2})}{2}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3$]

3. Vypočtěte:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}} : \sqrt[3]{\dfrac{2}{\sqrt[5]{8}}}$

b) $\dfrac{\left(2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 5^2\right)^2}{\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{10}}}$

c) $\left[\left(2^2 \cdot \frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$

d) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt{x}}{x^{-2}}} : \sqrt{\dfrac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}}\right)^{-1} \cdot \dfrac{x^{-3}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

[a) $\sqrt[5]{2}$; b) $2\,500\sqrt{5}\,\sqrt[6]{32}$; c) $\frac{4}{9}$; d) $x^{-\frac{79}{12}},\ x > 0$]

a) Pro $D > 0$ má kvadratická rovnice dva různé reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

b) Pro $D = 0$ má kvadratická rovnice jeden (dvojnásobný) reálný kořen

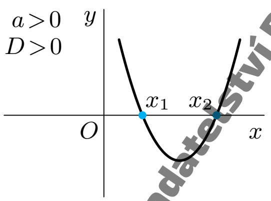
$$x = -\frac{b}{2a}\,.$$

c) Pro $D < 0$ nemá kvadratická rovnice žádný reálný kořen, má však dva komplexně sdružené imaginární kořeny

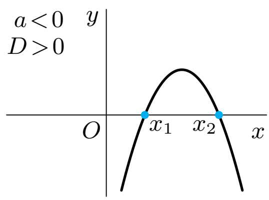
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}\,.$$

Grafické řešení

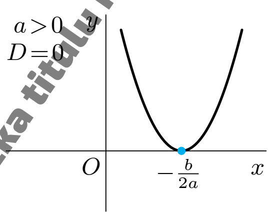
Počet reálných kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je roven počtu společných bodů paraboly o rovnici $y = ax^2 + bx + c$ a osy x (obr. 11 – 16).



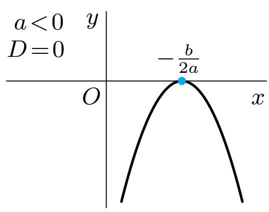
Obr. 11



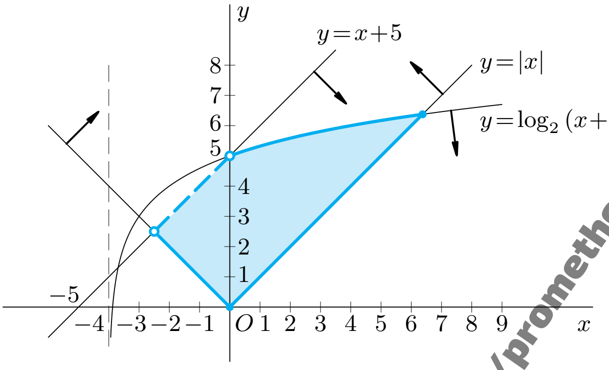
Obr. 12



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 35

Úlohy

145. Zakreslete množinu všech bodů $[x, y]$ v rovině, pro jejichž souřadnice platí:

a) $x + y \geqq 0 \quad \wedge \quad x - y - 2 \leqq 0 \quad \wedge \quad y - \log_2 x < 0$

b) $y \geqq 2^{x-3} \quad \wedge \quad y < x + 3 \quad \wedge \quad |y - 1| \leqq 3$

c) $y \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \quad \wedge \quad \sqrt{x} - y - 1 \leqq 0 \quad \wedge \quad x + y - 5 \leqq 0$

d) $y \geqq 2^x - 3 \quad \wedge \quad x + y - 3 \leqq 0 \quad \wedge \quad x - y + 2 \geqq 0$

146. V R řešte nerovnice:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{|x|}} \leqq 1$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243$

c) $2\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) - 1 \geqq 0$ d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 5\right) < 0$

[a) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1\rangle$; b) $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$; c) $x \in \left\langle 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 3\right)$; d) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{\log 4}{\log 3}, +\infty\right)$]

226. Je dán čtverec o straně délky a. Do něho je vepsán čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce; takto vzniklému čtverci je opět vepsán čtverec s vrcholy ve středech stran předchozího čtverce; atd. Postup se stále opakuje. Vypočtěte:

a) součet obvodů všech čtverců

b) součet obsahů všech čtverců

$\left[\ \text{a) } 4a(2+\sqrt{2});\ \text{ b) } 2a^2\ \right]$

227. Nad výškou rovnostranného trojúhelníku o straně délky a je sestrojen rovnostranný trojúhelník (výška původního trojúhelníku je jeho stranou); nad výškou nového trojúhelníku je opět sestrojen rovnostranný trojúhelník; atd. Postup se stále opakuje. Vypočtěte součet obsahů všech trojúhelníků.

$\left[\ a^2\sqrt{3}\ \right]$

228. Vypočtěte:

a) $A(n) = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+\ldots}$, kde $n \in \mathsf{N}$

b) $B = 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ \ldots$

$\left[\ \text{a) } A(n)=\frac{1}{4}(n+1);\ \text{ b) } B=9\ \right]$

229. V R řešte rovnici:

$$1+\log_2\cos x+\log_2^2\cos x+\ \ldots\ = \tfrac{2}{3}$$

$\left[\ x \in \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{-\frac{1}{4}\pi+2k\pi, \frac{1}{4}\pi+2k\pi\}\ \right]$

Kombinační čísla

Pro každá dvě čísla $k, n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$, $k \leqq n$, definujeme *kombinační číslo* $\binom{n}{k}$, čteme n nad k, takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Toto kombinační číslo je rovno počtu k-členných kombinací z n prvků, platí tedy:

$$K(k,n) = \binom{n}{k}$$

Pro každá dvě čísla $k, n \in \mathsf{N} \cup \{0\}$ platí:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \text{pokud} \quad k \leqq n \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \text{pokud} \quad k \leqq n-1 \tag{2}$$

Rovnost (2) je podkladem pro uspořádání kombinačních čísel do (neukončeného) trojúhelníkového schématu, tzv. *Pascalova trojúhelníku*, v jehož jednotlivých řádcích odpovídajících číslům $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$ jsou vždy čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

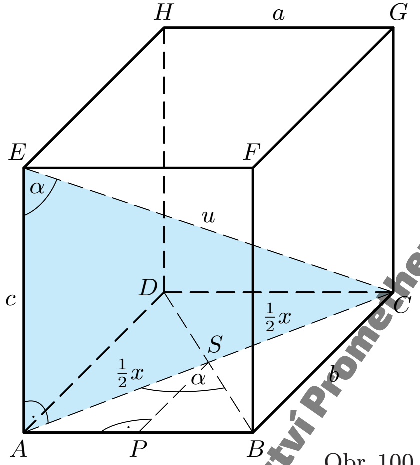
Kombinační čísla umístěná na ramenech Pascalova trojúhelníku jsou rovna jedné, každé kombinační číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku je rovno součtu dvou sousedních čísel, která jsou umístěna nad ním. Podle rovnosti (1) je Pascalův trojúhelník osově souměrný podle svislé osy.

Příklad 65

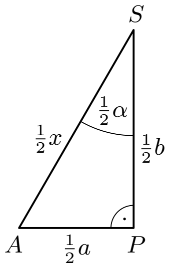
Tělesová úhlopříčka kvádru má délku $u = 10\,\text{cm}$. Odchylka tělesové úhlopříčky od boční hrany kvádru je $\alpha = 60°$. Stejnou odchylku α mají úhlopříčky podstavy. Vypočtěte objem kvádru.

Řešení

Vycházejme z označení podle obr. 100.



Obr. 100



Obr. 101

Délku x úhlopříčky podstavy vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ACE:

$$x = |AC| = |EC| \cdot \sin\alpha = u \cdot \sin\alpha$$

Délky hran a, b určíme z pravoúhlého trojúhelníku APS (obr. 101):

$$a = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot |AS| \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha = x \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha = u \cdot \sin\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$b = 2 \cdot |PS| = 2 \cdot |AS| \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha = x \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha = u \cdot \sin\alpha \cdot \cos\tfrac{1}{2}\alpha$$

Délku hrany c vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ACE:

$$c = |AE| = |EC| \cdot \cos\alpha = u \cdot \cos\alpha$$

30. Množinou všech řešení nerovnice

$$2 - |x - 3| \leqq 5x$$

je množina:

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ B. $\left\langle -\frac{1}{4}, \frac{5}{6} \right\rangle$
C. $\left\langle -\frac{1}{4}, +\infty \right)$ D. $\left\langle -\frac{1}{4}, 3 \right\rangle$

31. Počet celočíselných řešení soustavy nerovnic

$$x^2 - 20 < 0,$$
$$9 - 3x - 2x^2 \geqq 0,$$

která jsou dělitelná dvěma, je roven:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

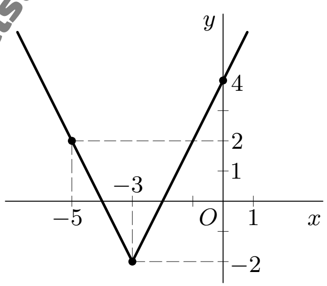
32. Množinou všech řešení nerovnice

$$3x - 2\sqrt{x} - 1 < 0$$

je interval:

A. $(-\infty, 1)$ B. $\langle 0, 1)$ C. $\left\langle 0, \frac{1}{9} \right)$ D. $(0, 1\rangle$

33. Na obrázku



je graf funkce:

A. $f\colon\ y = |x + 3| - 2$ B. $f\colon\ y = |x + 3| + 4$
C. $f\colon\ y = 2|x + 3| - 2$ D. $f\colon\ y = 2|x + 3|$