OBSAH

PŘEDMLUVA

Milí studenti středních škol,
milé kolegyně, vážení kolegové, učitelé matematiky,

dostáváte do rukou sbírku 1 200 úloh, která je doplněna 300 úlohami pro maturanty. Téměř u všech úloh jsou uvedeny v hranatých závorkách také výsledky. I když sbírka svým obsahem vychází z řady učebnic matematiky pro gymnázia, které vydalo již v několika vydáních nakladatelství Prometheus, je dobře použitelná i pro studenty a učitele odborných škol. Všech 1 200 úloh je členěno do 240 cvičení, z nichž každé obsahuje 5 úloh různé náročnosti. Sbírka je komplexní v tom smyslu, že pokrývá všechny klasické partie středoškolské matematiky. Otázkou je, do jaké míry je náročná. Na to lze vždy alibisticky odpovědět, že pro někoho ano, pro jiného ne. Proto jsou ve sbírce u některých úloh, které autor pokládá za náročnější, uvedeny návody k jejich řešení. Rád bych v této souvislosti poznamenal, že sbírka svým obsahem překračuje požadavky kladené na matematiku v Rámcových vzdělávacích programech pro gymnázia a střední odborné školy. Snad nebude přehnané tvrzení, že může být užitečná také v prvních semestrech bakalářských studijních programů na vysokých školách.

Se sbírkami to nebývá jednoduché. Není problém ukázat, že řada úloh se opakuje celá desetiletí. Není tomu jinak ani v této sbírce, určitě najdete úlohy, které vám budou povědomé.

Děkuji recenzentům doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc., doc. RNDr. Leo Bočkovi, CSc., a Mgr. Lence Kadlecové za jejich připomínky a doporučení, které významně přispěly k zlepšení obsahu knihy jak po stránce odborné, tak metodické. Tato sbírka by nevznikla bez velkého porozumění mé ženy, která mně vytvořila nejen dobré zázemí pro práci, ale také pomohla po stránce odborné a metodické. Za tuto podporu jí děkuji.

Vám, vážení studenti a kolegové přeji, aby vám práce se sbírkou přinášela radost a uspokojení při studiu matematiky.

Jevíčko, srpen 2008 *Dag Hrubý*

4 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

c) $-x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ d) $-x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$

5 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

c) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ d) $-4x^2 - 12x - 9 = 0$

1. a) -2, 1; b) 1, 2; c) -2, 1; d) -1, 2 **2.** a) -8, -5; b) 5, 8; c) -8, 5; d) -5, 8 **3.** a) nemá řešení; b) $-\sqrt{2}$, -1, 1, $\sqrt{2}$; c) -1, 1; d) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ **4.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$ **5.** a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$

Cvičení 26

1 Rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$ řešte v R:

a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

2 Rovnici $x^2 + 2x + 1 = 0$ řešte v R:

a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

Cvičení 45

1 Vnitřní úhly v trojúhelníku mají velikosti v poměru 2 : 3 : 5. V jakém poměru jsou velikosti vnějších úhlů? Zobecněte pro poměr $x : y : z$.

2 Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, platí-li pro ně vztahy $\alpha = 2\beta$, $\beta = 3\gamma$.

3 Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC se protínají v bodě S. Vyjádřete velikost úhlu ASB pomocí velikosti úhlu γ.

4 Osy vnějších úhlů při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C se protínají v bodě S. Vypočtěte velikost konvexního úhlu ASB.

5 Znovu sami dokažte základní poučku o tom, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°. Z ní pak odvoďte, že součet velikostí vnějších úhlů trojúhelníku je 360°.

[**1.** $8 : 7 : 5$; $(y+z) : (x+z) : (x+y)$ **2.** $108°, 54°, 18°$ **3.** $90° + \frac{1}{2}\gamma$ **4.** $45°$]

Cvičení 46

1 Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Bod O je středem základny AB. Bodem O jsou vedeny kolmice k ramenům AC a BC, jejich paty jsou označeny P a Q. Dokažte, že trojúhelník AOP je shodný s trojúhelníkem BOQ.

Cvičení 80

1 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = x^{-2}$

b) $h\colon y = x^{-4}$

c) $g\colon y = x^{-3}$

d) $i\colon y = x^{-5}$

Na závěr načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí f, h a do druhého obrázku grafy funkcí g, i.

2 K dané funkci najděte funkci inverzní a načrtněte do jednoho obrázku grafy obou funkcí:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1+x}$

b) $f\colon y = \dfrac{x-2}{x-3}$

c) $f\colon y = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f\colon y = \dfrac{x}{x+1}$

3 Danou funkci $f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ vyjádřete ve tvaru $y = \dfrac{k}{x-m} + n$, kde m, n jsou konstanty:

a) $f\colon y = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $f\colon y = \dfrac{x}{2x+3}$

c) $f\colon y = \dfrac{2x+3}{x-5}$

d) $f\colon y = \dfrac{1-x}{1+x}$

4 V R řešte graficky i početně dané rovnice a nerovnice:

a) $\dfrac{1}{x} \leqq x$

b) $\dfrac{x+1}{x-3} < 1$

c) $\dfrac{2x+1}{3x-2} \geqq 0$

d) $\dfrac{1}{|x|} \geqq 4 - |x|$

5 Načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{|x|}$

b) $f\colon y = \dfrac{x}{|x|+2}$

c) $f\colon y = \left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$

d) $f\colon y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$

Cvičení 187

1 Povrch kvádru je $78\,\mathrm{cm}^2$, součet jeho rozměrů je $13\,\mathrm{cm}$. Jak velký je jeho objem, jsou-li jeho rozměry vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti?

2 Délky stran trojúhelníku ABC v pořadí a, b, c jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Určete je, je-li jeho obvod $o = 42\,\mathrm{cm}$ a délka strany $b = 8\,\mathrm{cm}$

3 Jak velký je úhel $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$, tvoří-li $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

4 Bakterie se množí půlením tak, že k dělení dojde vždy za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin z jedné bakterie?

5 Poločas rozpadu rádia C je asi 20 minut. Jaké množství rádia C zbude za 4 hodiny z původního množství 1 mg? Jaké množství zbude za dobu t hodin?

[**1.** $27\,\mathrm{cm}^3$ **2.** úloha nemá řešení **3.** $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ **4.** asi 16 780 000 **5.** asi $\frac{1}{2^{12}}$ mg, asi $\frac{1}{2^{3t}}$ mg]

Cvičení 188

1 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+8}{n+2}$.

2 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$.

4 Základy pravděpodobnosti a statistiky

1 Házíme 3 mincemi. Určete množinu Ω všech možných výsledků a množiny A, B, které vyjadřují jevy:

A — Aspoň na dvou mincích padl rub.

B — Právě na dvou mincích padl rub.

2 Náhodně vybraný výrobek může být první, druhé nebo třetí jakosti. Označme jevy: A — vybraný výrobek je první jakosti, B — vybraný výrobek je druhé jakosti, C — vybraný výrobek je třetí jakosti. Interpretujte jevy:

a) $A \cup B$ b) $(A \cup B)'$ c) $(A \cup B) \cap C$

3 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet:

a) právě 11, b) aspoň 11,

c) nejvýš 11, d) nejvýš 12?

4 Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme všechna trojciferná přirozená čísla, v jejichž dekadickém zápisu se každá z těchto číslic vyskytuje nejvýše jednou. Určete pravděpodobnost, že z nich namátkou vybrané číslo je

a) dělitelné čtyřmi, b) dělitelné třemi,

c) dělitelné třemi a zároveň čtyřmi, d) dělitelné třemi nebo čtyřmi.

5 Každý ze dvou hráčů A, B hodí dvěma stejnými mincemi. Padne-li hráči A více lvů než hráči B, vyhraje hráč A. Jinak vyhraje hráč B. Vypočtěte pravděpodobnost výhry hráče A.

6 V písemné práci je 10 otázek a u každé z nich se má vybrat jedna ze 3 variant odpovědí, z nichž je právě jedna správná. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 8 odpovědí bude vybráno správně, vybíráme-li je náhodně?

7 Jsou-li A, B nezávislé jevy, pak jsou také nezávislé jevy

a) $A, \neg B$, b) $\neg A, \neg B$.

Dokažte.

18 Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

1 Je dána přímka $p\colon y = k_1x + q_1$ a přímka $q\colon y = k_2x + q_2$. Dokažte, že platí

$$p \perp q \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

2 Jsou dány body $A[2;0]$, $B[4;4]$, $C[-2;2]$. Určete střed S a rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC.

3 Je dán trojúhelník ABC, kde $A[4;-2]$, $B[2;8]$, $C[-3;0]$. Určete

a) parametrické rovnice přímky, na níž leží těžnice t_a,

b) parametrické rovnice přímky, na níž leží výška v_a,

c) délku výšky v_a.

4 Dokažte, že pro vzdálenost d dvou rovnoběžných přímek $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ platí:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5 Bodem $A[-2;2]$ prochází přímka p a bodem $B[6;8]$ přímka q tak, že tyto přímky jsou navzájem kolmé a jejich průsečík Q leží na ose x. Určete přímky p, q jejich rovnicemi ve směrnicovém tvaru.

6 Dokažte, že přímka o rovnici $2x + y + 1 = 0$ odděluje body $A[-2;1]$, $B[1;4]$ a určete nerovnici poloroviny s hraniční přímkou $2x+y+1=0$ a vnitřním bodem B.

7 V rovnici přímky $3x + by - 1 = 0$ stanovte parametr b tak, aby

a) přímka procházela bodem $Q[2;2]$,

b) přímka byla rovnoběžná s osou y,

c) směrový úhel této přímky měl velikost $\frac{1}{6}\pi$.

8 Najděte obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $Q[-3;0]$ a má od přímky $p\colon \sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$ odchylku $60°$.