OBSAH

1. FUNKCE – OPAKOVÁNÍ . . . 9
1.1 Vlastnosti funkcí a elementární funkce . . . 9
1.2 Operace s funkcemi . . . 17
1.3 Úlohy k opakování . . . 20

2. SPOJITOST FUNKCE . . . 22
2.1 Okolí bodu . . . 22
2.2 Spojitost funkce v bodě . . . 25
2.3 Spojitost funkce v intervalu . . . 31
2.4 Úlohy k opakování . . . 36
Exkurze do historie . . . 37

3. LIMITA FUNKCE . . . 39
3.1 Vlastní limita ve vlastním bodě . . . 39
3.2 Jednostranná limita . . . 48
3.3 Nevlastní limita ve vlastním bodě . . . 51
3.4 Limita funkce v nevlastním bodě . . . 58
3.5 Úlohy k opakování . . . 64
Exkurze do historie . . . 67

4. DERIVACE FUNKCE . . . 69
4.1 Definice derivace . . . 69
4.2 Základy derivování . . . 75
4.3 Přírůstek a diferenciál funkce (rozšiřující učivo) . . . 82
4.4 Význam derivace v geometrii . . . 87
4.5 Význam derivace ve fyzice, chemii a biologii . . . 90
4.6 Derivace vyšších řádů . . . 93
4.7 L'Hospitalovo pravidlo . . . 96
4.8 Úlohy k opakování . . . 99
Exkurze do historie . . . 101

5. PRŮBĚH FUNKCE . . . 105
5.1 Monotónnost funkce a derivace . . . 106
5.2 Lokální extrémy funkce . . . 111
5.3 Globální extrémy funkce a jejich aplikace . . . 116
5.4 Funkce konvexní, konkávní, inflexní body . . . 125
5.5 Asymptoty grafu funkce . . . 131
5.6 Průběh funkce . . . 135
5.7 Úlohy k opakování . . . 148
Exkurze do historie . . . 150

6. PRIMITIVNÍ FUNKCE 153
6.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál 153
6.2 Metody výpočtu primitivních funkcí 159
6.3 Úlohy k opakování 165
7. URČITÝ INTEGRÁL 168
7.1 Definice a základní vlastnosti 168
7.2 Geometrický význam určitého integrálu 177
7.3 Úlohy k opakování 186
Exkurze do historie 188
8. VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ 189
Literatura 212
Fotografie 213
Seznam použitých symbolů a značek 214
Rejstřík 215

2.3 Spojitost funkce v intervalu

A Příklady D a E z předchozího článku nás vedou k zavedení pojmu spojitosti funkce v intervalu. V případě otevřeného intervalu (a, b) se přirozeně nabízí definice:

Funkce f je **spojitá v intervalu** (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Po zavedení spojitosti v bodě zleva a zprava můžeme definovat spojitost funkce na uzavřeném intervalu:

Funkce f je **spojitá v uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá v každém bodě otevřeného intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva.

Spojitost v polouzavřených intervalech definujeme analogicky.

B Příklady D a E z článku 2.2 představují jednoduché příklady funkcí, jejichž spojitost v R se nám podařilo dokázat z definice. Obecně však tento postup může být velmi náročný, často je nutné provádět řadu komplikovaných úprav a umělých „triků“, a proto při rozhodování o spojitosti konkrétních funkcí budeme používat následující věty, které uvedeme bez důkazu:

Elementární funkce (viz článek 1.1) jsou spojité ve svých definičních oborech.

Jestliže jsou funkce f, g spojité v bodě x_0, pak jsou v tomto bodě spojité rovněž funkce $|f|$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$. Pokud navíc platí $g(x_0) \neq 0$, pak je i funkce $\dfrac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.

Je-li funkce $y = f(x)$ spojitá v bodě x_0 a funkce $z = g(y)$ spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$, pak složená funkce $h(x) = g\big(f(x)\big)$ je spojitá v bodě x_0.

C Rozhodneme o tom, v jaké množině jsou spojité funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{x}{1 + x^2}$, b) $g\colon y = \sin\sqrt{x}$, c) $h\colon y = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$.

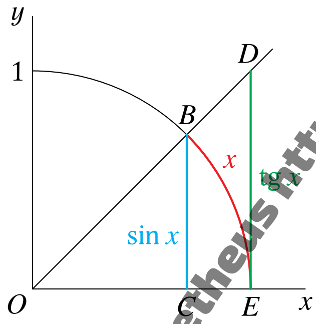
Jestliže platí $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ pro každé $x \in \mathsf{U}(x_0)$, $x \neq x_0$, a zároveň platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, potom existuje rovněž limita funkce g v bodě x_0 a platí

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

Věnujme pozornost jednoduchému ilustračnímu obrázku 3.6, který nám pomůže připomenout, že pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí soustava nerovností

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Rozmyslete si podrobně sami, proč tyto podmínky platí.



Obr. 3.6

[Porovnejte obsahy trojúhelníků OBE, ODE s obsahem kruhové výseče OBE v obr. 3.6.]

Násobením levé nerovnice výrazem $\frac{1}{x} > 0$ dostaneme odhad $\frac{\sin x}{x} < 1$, podobně násobením pravé nerovnice výrazem $\frac{\cos x}{x} > 0$ dostaneme odhad $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Celkem jsme získali odhad pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Položíme nyní

$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad h(x) = 1.$$

Vzhledem k tomu, že f, g, h jsou sudé funkce, bude stejná soustava nerovností platit i pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Dostáváme tak odhad funkce g shora i zdola pro všechna $x \in (0 - \delta, 0) \cup (0, 0 + \delta)$. Protože platí

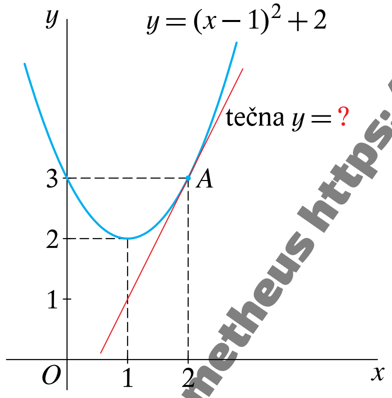
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

existuje podle věty o třech limitách i limita $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ a je rovna 1.

4. Derivace funkce

4.1 Definice derivace

A Hledejme rovnici tečny ke grafu kvadratické funkce $y = (x - 1)^2 + 2$, která prochází bodem $A[2; 3]$ (obr. 4.1).



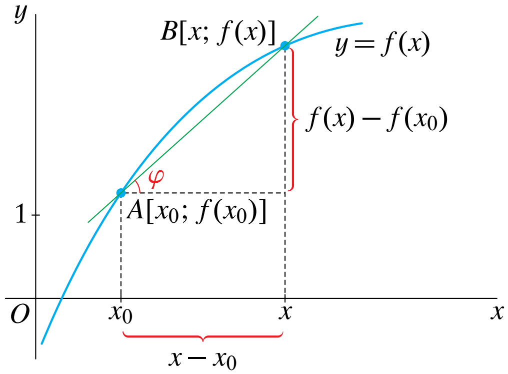
Obr. 4.1

Rovnice přímky, která prochází bodem [2; 3] a má směrnici k, je $y = k(x - 2) + 3$. Tečna paraboly je přímka, která má s parabolou jediný společný bod a přitom není rovnoběžná s její osou. Hledáme proto takovou hodnotu k, pro kterou bude mít soustava rovnic

$$y = (x - 1)^2 + 2,$$
$$y = k(x - 2) + 3$$

jediné řešení. Porovnáním pravých stran obou rovnic dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - (2 + k)x + 2k = 0$, jejíž diskriminant bude roven nule pro $k = 2$. Soustava má tedy jediné řešení, právě když $k = 2$, a rovnice tečny paraboly procházející bodem A je $y = 2(x - 2) + 3 \Rightarrow y = 2x - 1$.

Poznamenejme, že tento postup lze úspěšně použít u kuželoseček, ale pokud bychom stejným způsobem chtěli hledat například tečnu ke grafu funkce $y = \sin x$ v bodě $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$, uvedený postup by nefungoval. Naším cílem bude najít „univerzální" metodu pro určení rovnice tečny ke grafu libovolné funkce.



Obr. 4.3

Tuto limitu nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0*. Pokud je tato limita vlastní, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní* derivaci. V případě, kdy tato limita vyjde nevlastní, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní* derivaci.

Derivací funkce f v bodě $x_0 \in \mathrm{D}_f$ rozumíme limitu (pokud tato limita existuje)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a značíme ji $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Poznamenejme, že někdy se můžeme setkat místo značení $f'(x_0)$ i se značením $y'(x_0)$, případně $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Označíme-li rozdíl $x - x_0$ symbolem h, potom $x = x_0 + h$ a $x \to x_0$ právě tehdy, když $h \to 0$, a definici derivace lze psát ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

D Pomocí výše uvedené definice vypočteme derivaci funkce
a) $f\colon y = x^2$ v bodě $x_0 = 1$, b) $g\colon y = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4$,
c) $h\colon y = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.
Pozorně si pročtěte uvedená řešení a zdůvodněte jednotlivé kroky:

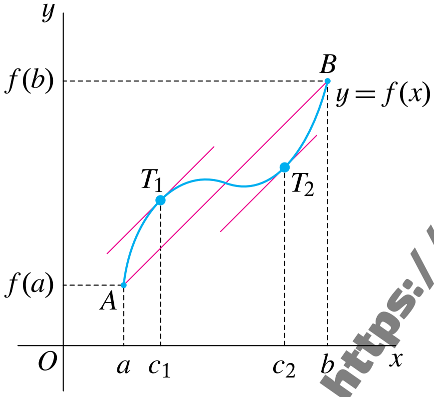
a) $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2,$

b) $g'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4},$

Uvažujme úsečku spojující body $A[a;\, f(a)]$ a $B[b;\, f(b)]$ ležící na grafu funkce f. Pro směrnici této úsečky platí

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle tvrzení Lagrangeovy věty existuje na grafu funkce f alespoň jeden bod, ve kterém je tečna rovnoběžná s úsečkou AB (a má tedy stejnou směrnici).



Obr. 5.3

Na grafu funkce f na obrázku 5.3 nacházíme dva body T_1, T_2, v nichž je tečna ke grafu funkce f rovnoběžná s úsečkou AB. Pro směrnice tečen v bodech $T_1[c_1;\, f(c_1)]$ a $T_2[c_2;\, f(c_2)]$ tedy platí

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_2).$$

C Nyní již můžeme naši hypotézu z příkladu A zapsat jako matematickou větu, kterou dokážeme s pomocí Lagrangeovy věty:

> Jestliže má funkce f v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci, potom je funkce f v tomto intervalu rostoucí.

Zvolme libovolné dva body x_1, x_2 z intervalu (a, b) tak, aby $x_1 < x_2$. Platí tedy $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (a, b)$ a funkce f je v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ spojitá (dle předpokladu má v každém bodě tohoto intervalu derivaci). Podle Lagrangeovy věty dále vždy existuje bod $c \in (x_1, x_2)$, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dle našeho předpokladu je $f'(c) > 0$, odkud vzhledem k podmínce $x_2 > x_1$ plyne, že $f(x_2) > f(x_1)$. Podařilo se nám dokázat, že pro libovolné dva body x_1, x_2 z intervalu (a, b) platí: je-li $x_2 > x_1$, potom $f(x_2) > f(x_1)$, což znamená, že funkce f je v daném intervalu rostoucí.

B Vyšetříme průběh funkce $f\colon y = x^3 - 3x + 2$.

1 Funkce f je definovaná pro každé $x \in \mathsf{R}$, tedy $\mathsf{D}_f = \mathsf{R}$. Vzhledem k tomu, že

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq \pm f(x),$$

nejde ani o funkci sudou, ani lichou. Funkce f není ani periodická.

2 Průsečíky grafu funkce f s osou x najdeme řešením rovnice $x^3 - 3x + 2 = 0$. Obecně algebraickou rovnici třetího stupně neumíme řešit. V daném případě si však můžeme pomoci odhadem – podíváme-li se na rovnici pozorně, vidíme, že číslo $x_1 = 1$ ji splňuje. Dále provedeme dělení polynomu $x^3 - 3x + 2$ polynomem $x - 1$:

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2.$$

Kořeny polynomu $x^2 + x - 2$ už najdeme snadno: $x_2 = 1$ a $x_3 = -2$. Vzhledem k tomu, že $x_1 = x_2$, dostáváme jen dva průsečíky s osou x $P_1[1; 0]$ a $P_2[-2; 0]$. Průsečíkem grafu s osou y je bod $P_3[0; 2]$.

3 Funkce f je definovaná pro každé reálné číslo x, a proto budeme počítat pouze limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty.$$

Funkce f je součtem spojitých funkcí x^3, $-3x$, 2, a je proto spojitá v celém svém definičním oboru.

4 Derivaci funkce f vypočteme pomocí věty o derivaci součtu:

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - 3(x)' + (2)' = 3x^2 - 3.$$

Derivace funkce f má smysl pro všechny přípustné hodnoty x, takže pro vyšetřování bodů podezřelých z toho, že by mohly být lokálním extrémem, nepřichází v úvahu body, ve kterých by derivace neexistovala. Stacionární budou body, pro které $f'(x) = 0$, tedy $3x^2 - 3 = 0$, což nastane pro $x = \pm 1$.

5 Vyšetření monotónnosti a lokálních extrémů si můžeme zapsat do tabulky:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce f je rostoucí v intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$, klesající v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Zároveň odtud plyne, že v bodě $x = -1$ má funkce f lokální maximum $f(-1) = 4$ a v bodě $x = 1$ má lokální minimum $f(1) = 0$.

6 Pro druhou derivaci funkce f platí:

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

7 Podmínku $f''(x) = 0$ splňuje pouze bod $x = 0$. Pro $x > 0$ je $f''(x) > 0$ a funkce f je v intervalu $(0, +\infty)$ konvexní. Pro $x < 0$ je $f''(x) < 0$ a funkce f je v intervalu

B Chceme-li vypočítat integrál $\int x \cos x \, dx$, nevystačíme pouze s taktikou, kterou jsme používali v předchozích příkladech. Nicméně tušíme, že člen $x \cos x$ se vyskytuje v derivaci součinu $x \sin x$. Podle věty o derivaci součinu totiž platí

$$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

Z definice primitivní funkce dále víme, že $x \sin x = \displaystyle\int (x \sin x)' \, dx$. Můžeme proto psát

$$x \sin x = \int (x \sin x)' \, dx = \int (\sin x + x \cos x) \, dx = \int \sin x \, dx + \int x \cos x \, dx.$$

Porovnáním prvního a posledního členu rovnic dostaneme

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C, \qquad x \in \mathsf{R}.$$

C Podobně můžeme větu o derivaci součinu použít pro libovolnou dvojici funkcí u, v majících v intervalu I spojité derivace, což nás vede k větě o integraci metodou per partes (integraci po částech).

Integrování metodou per partes
Pokud funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v intervalu I spojité derivace, pak v intervalu I platí:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx.$$

Pozor. Je nutné si uvědomit, že nejde o integraci součinu dvou funkcí $u(x)$, $v'(x)$, ale změnu jednoho integrálu na jiný integrál. Metoda je použitelná, pokud jsme schopni integrál na pravé straně dopočítat. V konkrétních úlohách používáme tuto metodu ke zjednodušení výpočtu, funkce $u(x)$, $v'(x)$ proto volíme pozorně, abychom si příklad ještě více nezkomplikovali. Jestliže máme např. integrovat součin polynomu a goniometrické funkce, volíme zpravidla polynom jako funkci $u(x)$, goniometrickou funkci jako $v'(x)$. Ukážeme si praktické použití této metody na několika příkladech.

D Pomocí metody per partes vypočteme:

a) $\displaystyle\int x e^x \, dx$, b) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$, c) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$.

a) Volba $u(x) = e^x$, $v'(x) = x$ by nás vedla k výpočtu $\int x^2 e^x \, dx$, tedy ještě obtížnější úloze, než byla úloha zadaná. Z tohoto důvodu volíme $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, odkud dostaneme $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. Postup výpočtu budeme zapisovat stručně takto:

$$\int x e^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v(x) = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x \, dx = e^x (x - 1) + C, \ \ x \in \mathsf{R}.$$

Cvičení

4 Vypočítejte:

a) $\int_1^3 x \ln x \, dx$, b) $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$, c) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$,

d) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$, e) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$, f) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$.

5 Vypočítejte:

a) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} \, dx$, b) $\int_3^7 \sqrt{x-1} \, dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$,

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx$, e) $\int_2^3 \sqrt{2x-3} \, dx$, f) $\int_{-1}^1 (2x+1)^5 \, dx$,

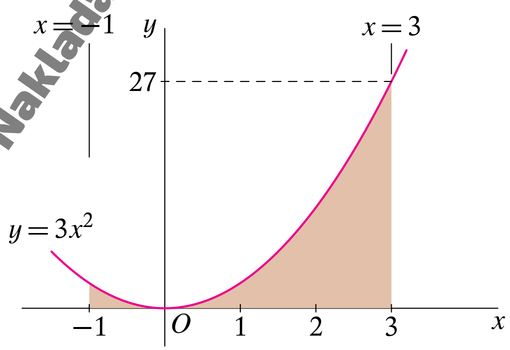
g) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$, h) $\int_0^5 \frac{1}{3x+1} \, dx$, i) $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1} \, dx$.

7.2 Geometrický význam určitého integrálu

Plocha omezená grafem nezáporné spojité funkce a osou x
Nechť funkce f je spojitá a nezáporná v intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ má plošný obsah

$$S = \int_a^b f(x) \, dx.$$

A Určíme obsah obrazce ohraničeného parabolou o rovnici $y = 3x^2$, osou x a přímkami o rovnicích $x = -1$, $x = 3$.



Obr. 7.5

Obrazec, jehož obsah hledáme, je vyznačen na obrázku 7.5. Pokuste se nejprve odhadnout velikost obarvené plochy.