Matematika v příkladech

1. díl

Hudcová – Kubičíková – Hudec

PROMETHEUS

Sbírka byla připravena ve spolupráci
s Jednotou českých matematiků a fyziků.

Zpracovali: RNDr. Milada Hudcová
Mgr. Libuše Kubičíková
Mgr. Tomáš Hudec

Lektorovaly: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
RNDr. Jindra Petáková

Revizi výsledků provedla: RNDr. Jindra Petáková

1. vydání

ISBN 978-80-7196-478-0

Úvod

Sbírka zahrnuje algebraické učivo 1. a 2. ročníků středních škol a učivo o funkcích. Je koncipována tak, že obsahuje skupiny úloh k jednotlivým tématům matematiky v obdobných variantách A, B, C, D zaměřených zpravidla na jeden jev. Varianta A je řešená a poskytuje obvykle jeden z možných způsobů, které lze využít k řešení úloh B, C, D. Pro lepší orientaci ve sbírce jsou výsledky úloh B, C, D uváděny vždy za řešením úlohy A. Formulace zadání úloh (případně i zápisy řešení a výsledků úloh) jsou v určitých obdobných případech záměrně různorodé s ohledem na jejich možný výskyt i v zadáních společné písemné části maturitní zkoušky z matematiky.

Díky takto sestaveným čtveřicím je žákům poskytnuta možnost procvičit a osvojit si dané učivo. Lze přispět k optimalizaci vyučování, k racionálnímu využití času při přípravě na vyučování a v jednotlivých jeho fázích, ke kontrole znalostí a dovedností žáků a jejich objektivní klasifikaci. Vzhledem k řešené variantě A lze snadněji individualizovat práci žáků různé studijní úrovně, uplatňovat samostatnou práci žáků ve vyučování i mimo ně.

Důležitý je vhodný výběr z úloh nabídnutých ve sbírce s ohledem na postavení matematiky v dané střední škole. Sbírka umožňuje žákům již od prvního ročníku střední školy systematicky studovat a připravovat se nejen k maturitní zkoušce z matematiky, ale i k přijímací zkoušce na vysokou školu.

Věříme, že sbírka bude pro vás užitečná a přispěje k vaší úspěšné práci.

Autoři

1 Číselné obory, absolutní hodnota reálného čísla

1 Je dána množina $\mathsf{M} = \{-1, 0, 32, 36, 48, 72\}$. Rozhodněte výpočtem, patří-li prvky a, b, c, d do množiny M.

A a) $a = [2 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-8)] : 7$, b) $b = [(-6) \cdot (+3)] \cdot (-2)$,
c) $c = -3^2 \cdot (-2)^2$, d) $d = \sqrt[3]{64} : \left(-\sqrt{16}\right)$;

B a) $a = [-5 \cdot (-2) + 10 \cdot (-1)] \cdot (-23)$, b) $b = [2 \cdot (-4)] \cdot (-9)$,
c) $c = (-2)^3 \cdot \left[-(2)^2\right]$, d) $d = -\sqrt{81} : \sqrt[3]{27}$;

C a) $a = -3 + [-18 \cdot (-1) - (-6) \cdot (-2)]$, b) $b = (-4) \cdot [(-4) \cdot 2]$,
c) $c = (-2)^3 \cdot (-3^2)$, d) $d = -\sqrt[3]{125} \cdot \left(-\sqrt{64}\right)$;

D a) $a = 5 - [3 \cdot (-3) - (-3) \cdot 3]$, b) $b = (-1) \cdot (-2 \cdot 4) \cdot (-6)$,
c) $c = \left(-3^1\right) \cdot \left(-2^4\right)$, d) $d = -\sqrt{100} : \sqrt[3]{1\,000}$.

Řešení A a) $a = [2 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-8)] : 7 = (-8 + 8) : 7 = 0 : 7 = 0$, $a \in \mathsf{M}$,
b) $b = [(-6) \cdot (+3)] \cdot (-2) = (-18) \cdot (-2) = 36$, $b \in \mathsf{M}$,
c) $c = -3^2 \cdot (-2)^2 = -9 \cdot (+4) = -36$, $c \notin \mathsf{M}$,
d) $d = \sqrt[3]{64} : \left(-\sqrt{16}\right) = 4 : (-4) = -1$, $d \in \mathsf{M}$.

Výsledky B a) $a = 0$, $a \in \mathsf{M}$, b) $b = 72$, $b \in \mathsf{M}$, c) $c = 32$, $c \in \mathsf{M}$, d) $d = -3$, $d \notin \mathsf{M}$; C a) $a = 3$, $a \notin \mathsf{M}$, b) $b = 32$, $b \in \mathsf{M}$, c) $c = 72$, $c \in \mathsf{M}$, d) $d = 40$, $d \notin \mathsf{M}$; D a) $a = 5$, $a \notin \mathsf{M}$, b) $b = -48$, $b \notin \mathsf{M}$, c) $c = 48$, $c \in \mathsf{M}$, d) $d = -1$, $d \in \mathsf{M}$.

2 Pro a)–b) určete, zda výsledek náleží do daného oboru.
Množiny v c)–d) vyznačte na číselné ose.

57 Určete, pro která reálná čísla x je výraz $V(x)$ roven 1. Ověřte správnost řešení dosazením výsledku do zadání.

A $V(x) = \dfrac{1+2x+x^2}{x-x^3} : \dfrac{1}{x-1}$;

B $V(x) = \dfrac{20x^2}{4x^2+1+4x} : \dfrac{8x^2-4x}{4x^2-1}$;

C $V(x) = \dfrac{3-6x+3x^2}{15+15x} : \dfrac{x^2+1-2x}{7x+4}$;

D $V(x) = \dfrac{2(2x-1)}{x^2+9-6x} : \dfrac{2x+6}{2x^2-18}$.

Řešení A Výraz $V(x)$ zjednodušíme a z výsledku určíme x pro $V(x)=1$. Dosazením nalezené hodnoty do zadání ověříme správnost postupu.

$$V(x) = \frac{1+2x+x^2}{x-x^3} : \frac{1}{x-1} = \frac{(1+x)^2}{x(1-x^2)} \cdot \frac{x-1}{1} =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{x(1-x)(1+x)} \cdot (-1) \cdot (1-x) = -\frac{1+x}{x},\ x \neq 0,\ x \neq \pm 1.$$

$V(x) = 1$, tzn. $-\dfrac{1+x}{x} = 1$, odkud $1+x=-x$, tj. $x = -\dfrac{1}{2}$.

$V(x) = 1$ pro $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ověření správnosti:

$$V\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3} : \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{1-1+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} : \frac{1}{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{8}} : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1;\ V\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Výsledky B $\dfrac{5x}{2x+1}$, $x = \dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{7x+4}{5+5x}$, $x = \dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{4x-2}{x-3}$, $x = -\dfrac{1}{3}$.

58 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ má výraz $V(x)$ danou hodnotu. Ověřte správnost řešení.

A $V(x) = \dfrac{x^3-8}{2+x} : (x^2+2x+4)$, $V(x) = 5$;

B $V(x) = \dfrac{x}{9-3x+x^2} : \dfrac{3x}{27+x^3}$, $V(x) = -2$;

C $V(x) = \dfrac{x^3+125}{2x-10} : (x^2-5x+25)$, $V(x) = 1$;

D $V(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} : \dfrac{4x^2+2x+1}{8x^3-1}$, $V(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Řešení A Výraz $V(x)$ zjednodušíme a výsledek položíme roven požadované hodnotě. Z této rovnice určíme hledané x.

$V(x) = \dfrac{x^3-8}{2+x} : (x^2+2x+4) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2+x} \cdot \dfrac{1}{x^2+2x+4} = \dfrac{x-2}{2+x}$, $x \neq -2$.

$V(x) = 5$, tzn. $\dfrac{x-2}{2+x} = 5$, odtud $x - 2 = 10 + 5x$, tj. $x = -3$;

$V(-3) = 5$.

Správnost ověříme dosazením $x = -3$ do zadání úlohy.

$V(-3) = \dfrac{(-3)^3-8}{2-3} : [(-3)^2 + 2\cdot(-3) + 4] = \dfrac{-35}{-1} \cdot \dfrac{1}{9-6+4} = \dfrac{35}{7} = 5.$

Výsledky B $\dfrac{x+3}{3}$, $x \neq 0$, $x \neq -3$, $V(-9) = -2$; C $\dfrac{x+5}{2(x-5)}$, $x \neq 5$, $V(15) = 1$;
D $2x+1$, $x \neq \dfrac{1}{2}$, $V\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$.

59 Jsou dány výrazy p, r. Zjednodušte výrazy a) $m = p \cdot r$, b) $n = p^2 : r$. Stanovte podmínky.

A a) $p = \dfrac{y^2}{25y^2-10y+1}$, $r = \dfrac{25y^2-1}{3y}$, b) $p = \dfrac{x-1}{-3}$, $r = \dfrac{x^2-1}{6x}$;

B a) $p = \dfrac{x^6}{6x-8}$, $r = \dfrac{3x^2-4x}{x^7}$, b) $p = \dfrac{y+2}{y}$, $r = \dfrac{3y^2+12y+12}{y^2}$;

C a) $p = \dfrac{4v+8}{5-v}$, $r = \dfrac{v-5}{v^2+4v+4}$, b) $p = \dfrac{s}{s-1}$, $r = \dfrac{as+a}{a^2s^2-a^2}$;

D a) $p = \dfrac{s^2-s}{18s}$, $r = \dfrac{6s-6}{s^2-2s+1}$, b) $p = \dfrac{2v}{a(v+1)}$, $r = \dfrac{2v^2}{av^2+av}$.

28 Řešte v oboru R.

A a) $1 - \dfrac{2x-3}{6} < x - \dfrac{3+4x}{3} \wedge (2x+3)^2 \geqq x(4x-5) - 8,$

b) $3 + \dfrac{5}{2}x \geqq x - \dfrac{1-3x}{2} \wedge x - (2-x)(1+x) > (x-4)x;$

B a) $2 + \dfrac{2}{5}x \leqq x - \dfrac{3x-12}{5} \wedge x(x+5) \geqq 3x - (x+1)(4-x),$

b) $2x - \dfrac{3-2x}{4} \geqq 1 - \dfrac{3-5x}{2} \wedge x(9x+3) - 11 > (3x-4)^2;$

C a) $1 + \dfrac{4x}{6} < x - \dfrac{2+x}{3} \wedge (5+2x)^2 \leqq 2x(1+2x) - 11,$

b) $x - \dfrac{3x-5}{4} > 2 - \dfrac{6-x}{4} \wedge x - (3+x)(1-x) \leqq (x-2)x;$

D a) $\dfrac{3x}{7} + 2 \leqq x - \dfrac{4x-21}{7} \wedge 2x - (x+4)(1-x) \leqq x(x-3),$

b) $1 - \dfrac{1-4x}{3} \leqq x - \dfrac{1-3x}{9} \wedge 3x(12x-5) - 5 > (2-6x)^2.$

Řešení A

a)
$$\begin{aligned}
1 - \frac{2x-3}{6} &< x - \frac{3+4x}{3} &&\wedge & (2x+3)^2 &\geqq x(4x-5) - 8\\
6 - (2x-3) &< 6x - 2(3+4x) &&\wedge & 4x^2 + 12x + 9 &\geqq 4x^2 - 5x - 8\\
6 - 2x + 3 &< 6x - 6 - 8x &&\wedge & 17x &\geqq -17\\
0 &< -15 &&\wedge & x &\geqq -1
\end{aligned}$$

Nerovnost $0 < -15$ neplatí, první nerovnice nemá řešení, tj. $x \in \emptyset$.
Určíme průnik řešení první a druhé nerovnice: $\emptyset \cap \langle -1, +\infty) = \emptyset$.
Soustava nemá řešení.

b)
$$\begin{aligned}
3 + \frac{5}{2}x &\geqq x - \frac{1-3x}{2} &&\wedge & x - (2-x)(1+x) &> (x-4)x\\
6 + 5x &\geqq 2x - (1-3x) &&\wedge & x - \left(2 + 2x - x - x^2\right) &> x^2 - 4x\\
6 + 5x &\geqq 2x - 1 + 3x &&\wedge & x - 2 - 2x + x + x^2 &> x^2 - 4x\\
0 &\geqq -7 &&\wedge & 4x &> 2\\
 & && & x &> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Nerovnost $0 \geqq -7$ platí, první nerovnice má nekonečně mnoho řešení, tj. $x \in$ R.
Určíme průnik řešení první a druhé nerovnice: $\mathrm{R} \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Výsledky B a) $\mathsf{R} \cap \left\langle -\frac{4}{5}, +\infty \right) = \left\langle -\frac{4}{5}, +\infty \right)$, b) $\emptyset \cap (1, +\infty) = \emptyset$;
C a) $\emptyset \cap (-\infty, -2\rangle = \emptyset$, b) $\mathsf{R} \cap \left(-\infty, \frac{3}{5}\right\rangle = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right\rangle$;
D a) $\mathsf{R} \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$, b) $\emptyset \cap (1, +\infty) = \emptyset$.

29

A Určete, která přirozená čísla jsou řešením soustavy nerovnic.

$$2x - (x-3)(5+x) \geqq 7 - (x-4)^2 \ \wedge \ \frac{2}{5}x - \frac{8-6x}{10} > 1$$

B Určete, která celá záporná čísla jsou řešením soustavy nerovnic.

$$\frac{3}{4}x - \frac{7-2x}{12} \leqq x \ \wedge \ 5 - (x+3)^2 < 2x - (x-2)(6+x)$$

C Určete, která celá nezáporná čísla jsou řešením soustavy nerovnic.

$$1 - (x+5)^2 \leqq 4x - (x+2)(x-4) \ \wedge \ \frac{3}{2}x - \frac{5+3x}{8} > \frac{5x}{4} - 1$$

D Určete, která celá záporná čísla jsou řešením soustavy nerovnic.

$$\frac{1}{3}x \leqq \frac{5}{6}x - \frac{4x-7}{12} \ \wedge \ 5 - (1-x)(4-x) > 2x - (x-2)^2$$

Řešení A

$$\begin{array}{rcll}
2x - (x-3)(5+x) \geqq 7 - (x-4)^2 & \wedge & \frac{2}{5}x - \frac{8-6x}{10} > 1 & | \cdot 10 \\
2x - \left(5x + x^2 - 15 - 3x\right) \geqq 7 - \left(x^2 - 8x + 16\right) & \wedge & 4x - (8-6x) > 10 & \\
2x - 5x - x^2 + 15 + 3x \geqq 7 - x^2 + 8x - 16 & \wedge & 4x - 8 + 6x > 10 & \\
24 \geqq 8x & \wedge & 10x > 18 & \\
x \leqq 3 & \wedge & x > 1{,}8 &
\end{array}$$

Řešení v oboru R: $x \in (-\infty, 3\rangle \cap (1{,}8; +\infty) = (1{,}8; 3\rangle$, v oboru N: $x \in \{2, 3\}$.

Výsledky B v R: $(-4, +\infty)$, v Z^-: $\{-3, -2, -1\}$; C v R: $\langle -2, 3)$, v Z_0^+: $\{0, 1, 2\}$;
D v R: $\langle -3{,}5; 5)$, v Z^-: $\{-3, -2, -1\}$.

13 Určete početně, zda body K, L leží na grafu funkce f dané rovnicí, dále určete neznámou souřadnici bodu $M \in f$.

A $\quad f\colon 3x + y - 1 = 0,\ K[0, -2],\ L[1, -2],\ M\left[\frac{2}{3}, ?\right];$

B $\quad f\colon -x + 2y + 4 = 0,\ K[6, 1],\ L[-3, 2],\ M\left[?, -\frac{5}{2}\right];$

C $\quad f\colon -4x + y - 3 = 0,\ K[-1, 1],\ L[-2, -5],\ M\left[\frac{3}{4}, ?\right];$

D $\quad f\colon x - 5y + 2 = 0,\ K[8, 2],\ L[-7, 1],\ M\left[?, \frac{2}{5}\right].$

Řešení A Leží-li bod na grafu funkce f, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici funkce f. Dosadíme postupně souřadnice bodu $K[0, -2]$ a $L[1, -2]$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 + (-2) - 1 &= 0 \\ -3 &= 0 \quad \text{neplatí, } K \notin f \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3 \cdot 1 + (-2) - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{platí, } L \in f \end{aligned}$$

Za x dosadíme x-ovou souřadnici bodu $M\left[\frac{2}{3}, ?\right]$ a vypočteme y:

$$3 \cdot \frac{2}{3} + y - 1 = 0, \text{ pak } y = -1, \text{ tzn. } M\left[\frac{2}{3}, -1\right].$$

Výsledky B $K \in f,\ L \notin f,\ M\left[-1, -\frac{5}{2}\right]$; C $K \notin f,\ L \in f,\ M\left[\frac{3}{4}, 6\right]$; D $K \in f,$ $L \notin f,\ M\left[0, \frac{2}{5}\right]$.

14 Funkce je dána předpisem. Určete hodnotu neznámého parametru v předpisu funkce, jestliže bod A leží na grafu funkce. Pak vypočítejte neznámou souřadnici bodu B tak, aby také ležel na grafu funkce.

A a) $y = ax^2 + 2,\ A[-1, 3],\ B[x_B, 6],$

b) $y = \frac{k}{x},\ A[3, -2],\ B[-1, y_B];$

B a) $y = kx - 4,\ A[2, -3],\ B[x_B, 0],$

b) $y = ax^{-2},\ A[-1, 4],\ B[2, y_B];$

C a) $y = c - 2x^2$, $A[1,2]$, $B[x_B, -4]$,
b) $y = bx^3$, $A[-2,2]$, $B[2, y_B]$;

D a) $y = -\dfrac{x}{2} + q$, $A[5,-1]$, $B[-1, y_B]$,
b) $y = cx^{-3}$, $A[2,1]$, $B[x_B, -8]$.

Řešení A Hodnotu neznámého parametru funkce vypočítáme tak, že dosadíme za x a y souřadnice bodu A.

a) $y = ax^2 + 2, \quad A[-1,3]$
$3 = a \cdot (-1)^2 + 2 \Rightarrow a = 1$
Předpis funkce je $y = x^2 + 2$. Souřadnici x_B vypočítáme, dosadíme-li do předpisu funkce za y druhou souřadnici bodu B. Tj. $6 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Dostaneme dva body: $B[2,6]$, $B'[-2,6]$.

b) $y = \dfrac{k}{x}, \quad A[3,-2]$
$-2 = \dfrac{k}{3} \Rightarrow k = -6$
Předpis funkce je $y = \dfrac{-6}{x}$. Dosadíme za x číslo -1. Tj. $y = \dfrac{-6}{-1} \Rightarrow y = 6$, $B[-1,6]$.

Výsledky B a) $k = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}x - 4$, $B[8,0]$, b) $a = 4$, $y = 4x^{-2}$, $B[2,1]$; C a) $c = 4$, $y = 4 - 2x^2$, $B[2,-4]$, $B'[-2,-4]$, b) $b = -\dfrac{1}{4}$, $y = -\dfrac{x^3}{4}$, $B[2,-2]$; D a) $q = \dfrac{3}{2}$, $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$, $B[-1,2]$, b) $c = 8$, $y = 8x^{-3}$, $B[-1,-8]$.

15 V pravoúhlé soustavě Oxy sestrojte přímky p_1 a p_2 dané rovnicemi a určete jejich průnik. Rozhodněte, jsou-li p_1, p_2 grafy funkcí. Pokud ano, určete, zda jsou tyto funkce prosté v R.

A $p_1\colon x - 5 = 0$, $p_2\colon x - y = 2$;
B $p_1\colon y + 1 = 0$, $p_2\colon x + y = 3$;
C $p_1\colon x + 4 = 0$, $p_2\colon y - x = 1$;
D $p_1\colon y - 3 = 0$, $p_2\colon x + y = 4$.

Řešení A $p_1\colon x - 5 = 0$, tj. $x = 5$. Přímka je rovnoběžná s osou y.
$p_2\colon x - y = 2$, tj. $y = x - 2$. Přímka prochází body $[0,-2]$, $[2,0]$.
Průnikem přímek je bod $P[5,3]$. Obr. 5.39. p_1 není grafem funkce, p_2 je grafem prosté funkce.

Výsledky B $P[4,-1]$, p_1 je grafem konstantní funkce, není prostá, p_2 je grafem prosté funkce, obr. 5.40; C $P[-4,-3]$, p_1 není grafem funkce, p_2 je grafem prosté funkce, obr. 5.41; D $P[1,3]$, p_1 je grafem konstantní funkce, není prostá, p_2 je grafem prosté funkce, obr. 5.42.

5

26 Řešte exponenciální rovnici pro $x \in \mathsf{R}$.

A a) $49^{x^2} = 7^8$, b) $512^{x^2} = \dfrac{1}{64^{2x}}$;

B a) $121^2 = 11^{x^2}$, b) $\dfrac{1}{343^{x^2}} = 49^{3x}$;

C a) $36^8 = 6^{x^2}$, b) $729^{x^2} = \dfrac{1}{81^{4x}}$;

D a) $81^{x^2} = 9^{18}$, b) $\dfrac{1}{216^{x^2}} = 36^{3x}$.

Řešení A

a)
$$\begin{aligned} 49^{x^2} &= 7^8 \\ \left(7^2\right)^{x^2} &= 7^8 \\ 7^{2x^2} &= 7^8 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ |x| &= 2 \\ \mathsf{K} &= \{-2, 2\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 512^{x^2} &= \frac{1}{64^{2x}} \\ 8^{3x^2} &= \frac{1}{8^{4x}} \\ 8^{3x^2} &= 8^{-4x} \\ 3x^2 + 4x &= 0 \\ x(3x+4) &= 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = -\frac{4}{3} \\ \mathsf{K} &= \left\{0, -\frac{4}{3}\right\} \end{aligned}$$

Výsledky B a) $\{-2, 2\}$, b) $\{0, -2\}$; C a) $\{-4, 4\}$, b) $\left\{-\dfrac{8}{3}, 0\right\}$; D a) $\{3, -3\}$, b) $\{-2, 0\}$.

27 a) Řešte v R.

b) Vyberte interval, ve kterém má rovnice řešení:

$(-\infty, 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left\langle \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $(0; 0{,}2)$.

A a) $\dfrac{4^{x^2}}{64^{x+3}} = 4$, b) $4^{\sqrt{6x-1}} = 64^x$;

B a) $\dfrac{7^{x^2}}{49^{7-x}} = 7$, b) $32^x = 2^{\sqrt{10x-1}}$;

C a) $\dfrac{2^{x^2}}{32^{x+1}} = 2$, b) $81^x = 3^{\sqrt{8x-1}}$;

D a) $\dfrac{3^{x^2}}{81^{5-x}} = 3$, b) $5^{\sqrt{4x-1}} = 25^x$.

Řešení A

a)
$$\frac{4^{x^2}}{64^{x+3}} = 4$$
$$\frac{4^{x^2}}{(4^3)^{x+3}} = 4$$
$$\frac{4^{x^2}}{4^{3x+9}} = 4$$
$$4^{x^2-3x-9} = 4^1$$
$$x^2 - 3x - 9 = 1$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = -2$$
$$\mathsf{K} = \{-2, 5\}$$

b)
$$4^{\sqrt{6x-1}} = 64^x$$
$$4^{\sqrt{6x-1}} = 4^{3x}$$
$$\sqrt{6x-1} = 3x \qquad |^2$$
$$6x - 1 = 9x^2$$
$$0 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$0 = (3x-1)^2$$
$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ověřte zkouškou}$$
$$\frac{1}{3} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Výsledky B a) $x^2 + 2x - 15 = 0$, $\{3, -5\}$, b) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$; C a) $x^2 - 5x - 6 = 0$, $\{6, -1\}$, b) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$; D a) $x^2 + 4x - 21 = 0$, $\{3, -7\}$, b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$.

28 a) Řešte v oboru celých záporných čísel.
b) Řešte v oboru přirozených čísel.

A a) $3^{\frac{3}{x-4}} = 3^x \cdot \frac{1}{9}$, b) $\left(\frac{36}{25}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{125}{216}\right)^x = 1{,}2$;

B a) $2^x \cdot \frac{1}{16} = 2^{\frac{7}{x+2}}$, b) $\left(\frac{4}{25}\right)^x \cdot 2{,}5 = \left(\frac{125}{8}\right)^{2x-1}$;

C a) $5^x \cdot \frac{1}{125} = 5^{\frac{15}{x-1}}$, b) $0{,}75 \cdot \left(\frac{64}{27}\right)^x = \left(\frac{9}{16}\right)^{x-2}$;

D a) $10^{\frac{24}{x-5}} = 10^x \cdot \frac{1}{1\,000}$, b) $\left(\frac{8}{343}\right)^{3-x} \cdot 3{,}5 = \left(\frac{49}{4}\right)^x$.

Řešení A

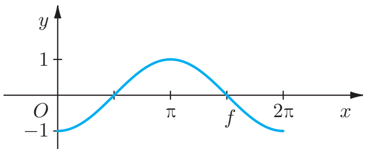
a)
$$3^{\frac{3}{x-4}} = 3^x \cdot \frac{1}{9}$$
$$3^{\frac{3}{x-4}} = 3^x \cdot 3^{-2}$$
$$3^{\frac{3}{x-4}} = 3^{x-2}$$
$$\frac{3}{x-4} = x - 2 \qquad | \cdot (x-4),\ x \neq 4$$
$$3 = x^2 - 6x + 8$$
$$0 = x^2 - 6x + 5$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

Rovnice v Z^- nemá řešení, $\mathsf{K} = \emptyset$.

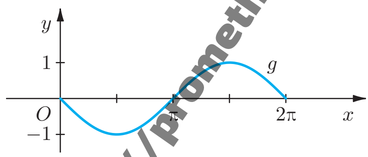
B Graf funkce obr. 8.18:

a) $y = \sin(x - \pi)$,   b) $y = -\sin x$,

c) $y = \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$,   d) $y = -\cos x$;



Obr. 8.17



Obr. 8.18

C Graf funkce obr. 8.19:

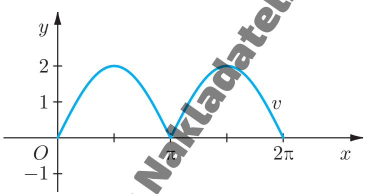
a) $y = |2\sin x|$,   b) $y = 2|\cos(x + \pi)|$,

c) $y = \left|2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$,   d) $y = 2|\sin(x - \pi)|$;

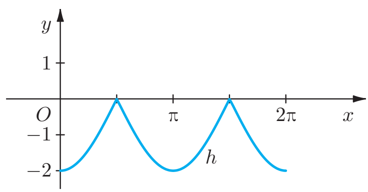
D Graf funkce obr. 8.20:

a) $y = -2|\cos(x + \pi)|$,   b) $y = -|2\cos(x - \pi)|$,

c) $y = -2\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$,   d) $y = -\left|2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$.



Obr. 8.19



Obr. 8.20

Řešení A Načrtneme-li grafy funkcí daných předpisy a)–d), zjistíme, že předpis c) $y = \sin(x + \pi)$ neodpovídá danému grafu funkce f.

Výsledky B Neodpovídá předpis d); C neodpovídá předpis b); D odpovídají všechny předpisy.

22 Načrtněte grafy funkcí pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

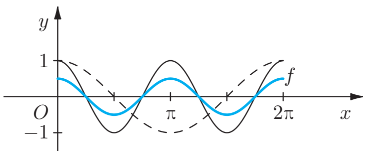
A a) $f\colon y = 0{,}5 \cos 2x$, b) $g\colon y = \left|\operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| - 1$;

B a) $f\colon y = \sin(x + \pi) + 2$, b) $g\colon y = -\left|\operatorname{cotg} \frac{x}{2}\right|$;

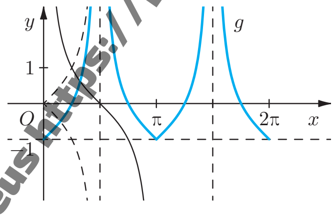
C a) $f\colon y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, b) $g\colon y = |\operatorname{tg} 2x| + 1$;

D a) $f\colon y = \cos \frac{x}{2} - 1$, b) $g\colon y = -\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$.

Řešení A a) Obr. 8.21, b) obr. 8.22.

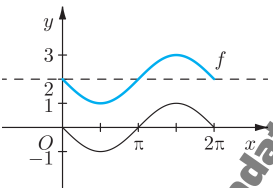


Obr. 8.21

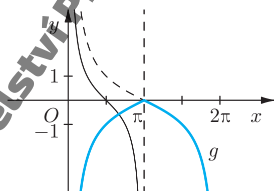


Obr. 8.22

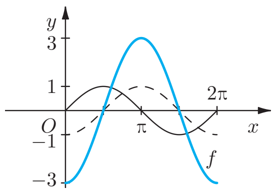
Výsledky B a) Obr. 8.23, b) obr. 8.24; C a) obr. 8.25, b) obr. 8.26; D a) obr. 8.27, b) obr. 8.28.



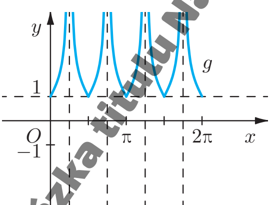
Obr. 8.23



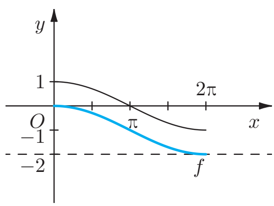
Obr. 8.24



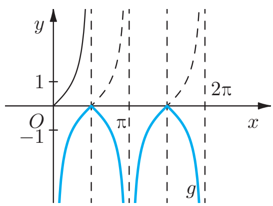
Obr. 8.25



Obr. 8.26



Obr. 8.27



Obr. 8.28