OBSAH

ÚVOD

Nelze asi nic namítat proti tvrzení, že nejjednodušší útvar, který má *délku*, je *úsečka*. Podobně snad obstojí tvrzení o tom, že nejjednodušší útvar, který má *plochu*, je *trojúhelník*. Jak už víme, je to část roviny omezená třemi úsečkami, které spojují tři body, zvané vrcholy trojúhelníku.

První praktické poznatky o trojúhelníku si lidé osvojili již ve starověku. Obyvatelé staré Číny, Mezopotámie a Egypta uměli vypočítat *obsah* libovolného trojúhelníku. Věděli také, že trojúhelník, jehož strany mají délku 3, 4 a 5 jednotek, má pravý úhel proti nejdelší straně. Tento poznatek využívali například staří Egypťané. Pomocí napnutých lan vytyčovali pravé úhly při zemních a stavebních pracích.

Skutečný rozkvět zaznamenala geometrie trojúhelníku v období starého Řecka zásluhou takových matematiků, jakými byli *Pythagoras*, *Eukleides* a *Archimedes*. Od té doby víme, že k libovolnému trojúhelníku můžeme sestrojit řadu význačných bodů, úseček, přímek a kružnic, které mají pozoruhodné vlastnosti. S nejdůležitějšími z nich se v tomto sešitě seznámíme. Zdůrazněme, že „seznam“ vlastností trojúhelníku není patrně dodnes úplný. I v našem století totiž vycházejí matematické práce věnované novým vlastnostem trojúhelníků a odpovídajícím konstrukcím. Úkolem matematiků není jen takové zákonitosti objevovat (např. přesným rýsováním), ale i přísně logicky odůvodňovat. Takovýmto zdůvodněním říkáme v matematice *důkaz*. Několik důkazů najdete i v tomto sešitě.

Poznatky o trojúhelnících využijeme při studiu útvarů, které je možné z trojúhelníků „složit“. Složením dvou „vhodných“ trojúhelníků vznikne útvar se čtyřmi vrcholy, stranami a vnitřními úhly. Nazývá se *čtyřúhelník*. Mezi čtyřúhelníky patří i takové, které již dobře znáte – např. *čtverec* a *obdélník*. Podrobnému výkladu o čtyřúhelnících věnujeme několik závěrečných kapitol této učebnice.

Jestliže pro trojúhelníky ABC a XYZ platí rovnosti

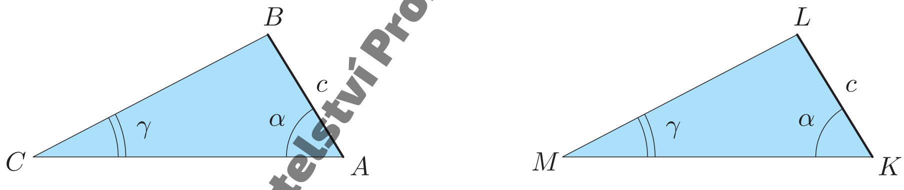
$$|AB| = |XY|, \quad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ZXY| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|,$$

pak jsou tyto trojúhelníky shodné: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Tvrzení v rámečku se nazývá ***věta usu***. Písmena u, s, u připomínají, že trojúhelníky mají shodné dvě dvojice vnitřních úhlů a jednu dvojici stran.

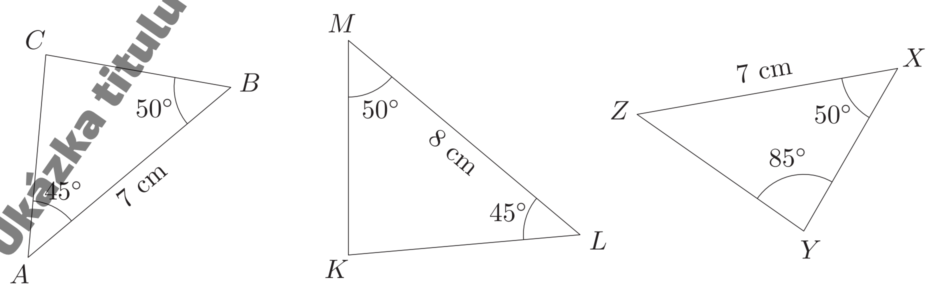
Někdy můžeme větu *usu* použít i v jiné situaci. Například o trojúhelnících ABC a KLM z obrázku víme, že

$$|AB| = |KL|, \qquad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|, \qquad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|.$$



Protože součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku je 180°, shodují se oba trojúhelníky i ve vnitřních úhlech při vrcholech B a L. Proto jsou podle věty *usu* shodné.

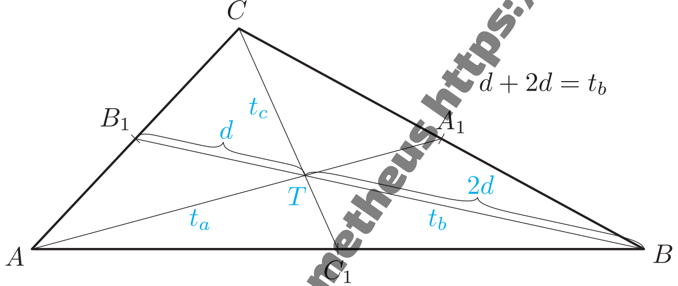
3. Které trojúhelníky na obrázku jsou shodné? Svou odpověď zdůvodněte.



Každá těžnice je bodem T rozdělena na dvě úsečky různých délek. Delší z nich obsahuje vrchol trojúhelníku, kratší střed protější strany. Změřte a zapište délky těžnic i jejich částí do tabulky:

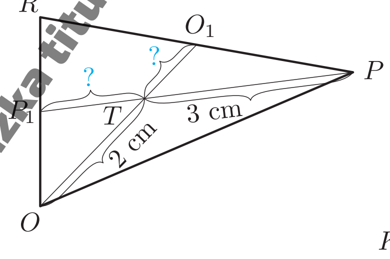
Těžnice	Délka		
	celé těžnice	kratší části	delší části
t_a			
t_b			
t_c			

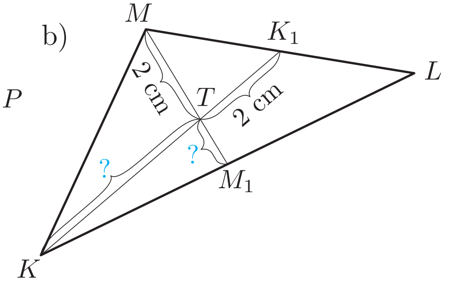
Delší část každé těžnice má **dvojnásobnou** délku než její kratší část.



Těžnice trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany.
Všechny tři těžnice každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě – **těžišti** trojúhelníku. Tento bod dělí těžnici na dvě úsečky. Delší část obsahuje vrchol a je dvakrát delší než kratší část.

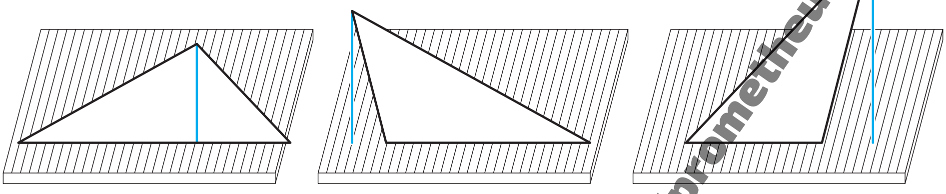
1. Doplňte chybějící údaje u náčrtku trojúhelníku s těžnicemi:

a) 

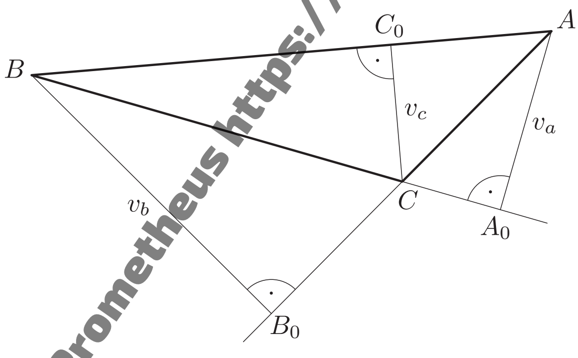
b) 

Co platí pro výšky v *tupoúhlém* trojúhelníku?

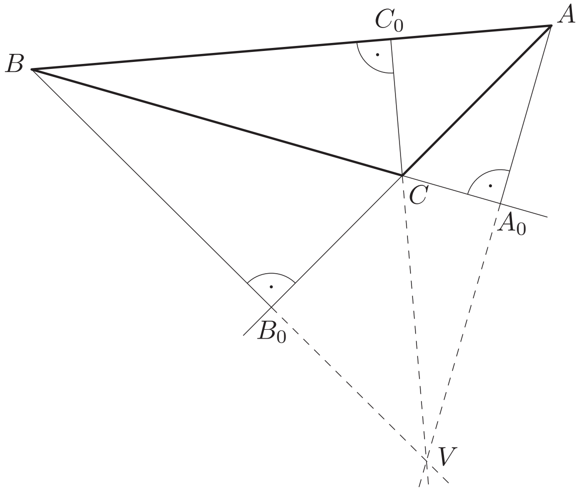
Vystřihněte si z papíru tupoúhlý trojúhelník a zopakujte pokus s hledáním výšek.

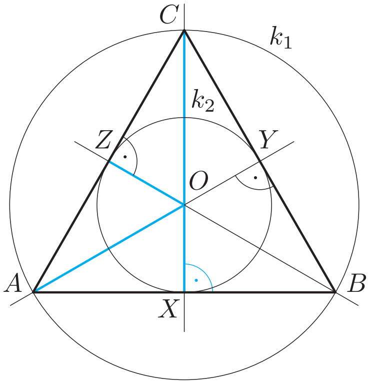


Všimněte si, že dvě z výšek nemůžeme do trojúhelníku vyznačit. Abychom je mohli narýsovat, musíme „prodloužit“ strany trojúhelníku.



V tupoúhlém trojúhelníku tedy leží dvě z jeho výšek vně trojúhelníku. Jeho tři výšky nemají žádný společný bod. Proložíme-li však každou z výšek přímku, protnou se tyto tři přímky v jediném bodě. Označíme ho V. Také v tomto případě se bod V nazývá *průsečík výšek*.



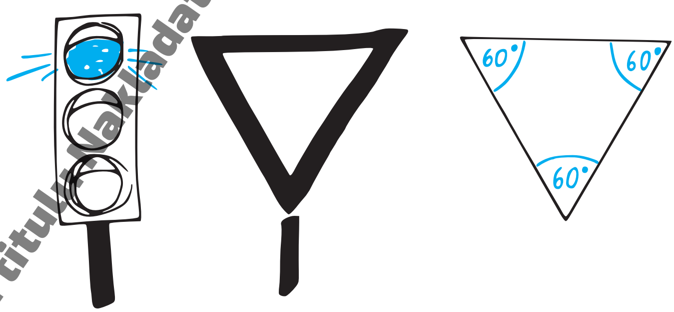


CX je výška ke straně AB
CX je těžnice z vrcholu C
AO je poloměr kružnice opsané
OZ je poloměr kružnice vepsané

Prohlédněte si předchozí obrázek. Je na něm narýsován rovnostranný trojúhelník ABC, jeho těžnice, výšky, kružnice opsaná i kružnice vepsaná. Všimněte si, že kružnice vepsaná se dotýká každé strany trojúhelníku ABC v jejím středu.

Určíme nyní velikosti vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku. Protože v libovolném trojúhelníku leží proti shodným stranám shodné úhly, jsou všechny tři vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku shodné. Velikost každého z nich je proto 60°.

Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku má velikost 60°.



Vyjmenovali jsme několik důležitých vlastností rovnostranného trojúhelníku, které žádný jiný trojúhelník nemá. Ukážeme to na jednom příkladu.

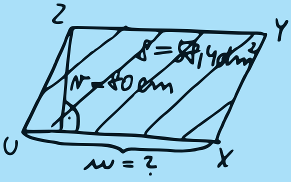
Obsah rovnoběžníku je roven součinu jeho strany a k ní příslušné výšky.

Pokud známe obsah rovnoběžníku a výšku příslušnou k jedné z jeho stran, můžeme délku této strany vypočítat.

Příklad 1. Vypočtěte délku strany UX rovnoběžníku $UXYZ$, který má obsah $58{,}4\,\mathrm{dm}^2$ a ve kterém výška ke straně UX měří $80\,\mathrm{cm}$.

Řešení. Eva počítala délku strany UX takto:

rovnoběžník UXYZ:



$80\,\mathrm{cm} = 8\,\mathrm{dm}$

$S = u \cdot v$

$58{,}4\,\mathrm{dm}^2 = u \cdot 8\,\mathrm{dm}$

$u = 58{,}4\,\mathrm{dm}^2 : 8\,\mathrm{dm}$

$u = 7{,}3\,\mathrm{dm}$

Zk.: $u \cdot v = 7{,}3\,\mathrm{dm} \cdot 8\,\mathrm{dm} = 58{,}4\,\mathrm{dm}^2$

Strana UX má délku 7,3 dm.

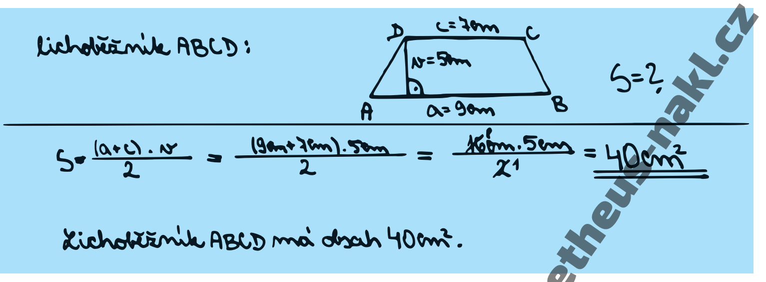
1. Vypočtěte obsah rovnoběžníku $KLMN$, má-li strana KL délku $5\,\mathrm{cm}$ a je-li výška k této straně rovna $3\,\mathrm{cm}$.

2. Vypočtěte výšku ke straně BC rovnoběžníku $ABCD$, je-li jeho obsah $14{,}08\,\mathrm{cm}^2$ a má-li strana BC délku $4{,}4\,\mathrm{cm}$.

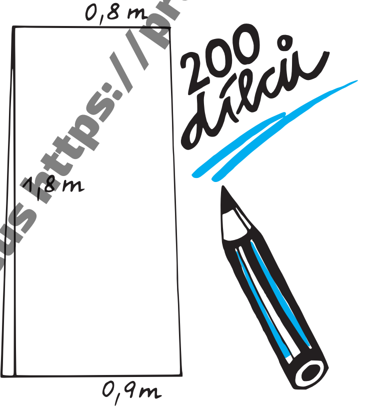
Jak určíme obsah *trojúhelníku*?

K odvození obsahu trojúhelníku budeme opět potřebovat papír a nůžky. Vystřihneme z papíru libovolný trojúhelník. Abychom snadno určili jeho obsah, vystřihneme ještě jeden shodný trojúhelník a z obou „slepíme“ rovnoběžník.

Barbora



Příklad 3. V dílně dostali zakázku na ušití 200 stanových dílců pro vojenský útvar. Dílec má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Mistr si udělal náčrt a připsal k němu požadované rozměry. Kolik čtverečných metrů celtoviny budou potřebovat na zhotovení zakázky, jestliže mistr celkem počítá s $30\,\mathrm{m}^2$ celtoviny navíc na švy a odpad?



Řešení. Každý dílec má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami 0,8 m a 0,9 m a výškou 1,8 m. Proto na výrobu jednoho dílce bude třeba

$$\frac{(0{,}8\,\mathrm{m} + 0{,}9\,\mathrm{m}) \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}}{2} = 1{,}53\,\mathrm{m}^2.$$

Na ušití 200 dílců bude tedy třeba $200 \cdot 1{,}53\,\mathrm{m}^2 = 306\,\mathrm{m}^2$ látky. Přidáme-li $30\,\mathrm{m}^2$ na odpad, bude celková spotřeba celtoviny $336\,\mathrm{m}^2$.

9. Vypočtěte obsah lichoběžníku se základnami a, c a výškou v:

a) $a = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $c = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $v = 4\,\mathrm{m}$

b) $a = 20\,\mathrm{mm}$, $c = 100\,\mathrm{mm}$, $v = 60\,\mathrm{mm}$

c) $a = 3\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, $v = 0{,}8\,\mathrm{cm}$