OBSAH

1 % ze z .... 13 m
$č$ .... $13\,\mathrm{m}\cdot 1{,}4 = 18{,}2\,\mathrm{m}$

Rozdíl nadmořských výšek míst A a B na železniční trati je 18,2 m.

Úlohy

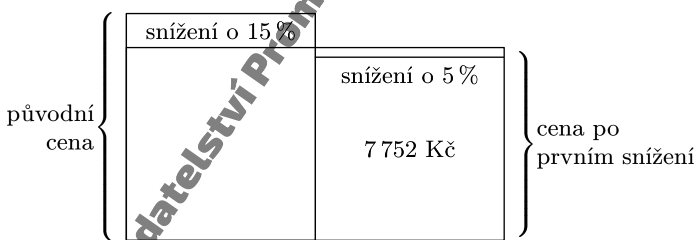
32. Mezi místy A, B, jejichž vodorovná vzdálenost je 1,5 km, má železniční trať stoupání 8 ‰, mezi místy B, C, jejichž vodorovná vzdálenost je 900 m, má železniční trať stoupání 14 ‰. Určete rozdíl nadmořských výšek míst A, C.

33. Rozdíl nadmořských výšek míst A, B na železniční trati je 38,5 m, jejich vodorovná vzdálenost je 3,5 km. Určete stoupání trati.

Příklad 8

Cena ledničky byla dvakrát snížena. Nejprve o 15 %, později ještě o 5 % z nové ceny. Po tomto dvojím snížení cen se lednička prodávala za 7 752 Kč. Vypočítejte její původní cenu.

Řešení
Znázorníme si celou situaci nejprve graficky (obr. 2):



Obr. 2

Výpočet provádíme postupně od nové ceny k ceně původní.
$č_1 = 7\,752$ Kč
$p_1 = 95$
$z_1 = \ldots$ Kč
Vypočítaný základ z_1 je zároveň částí $č_2$ základu z_2 pro výpočet původní ceny ledničky.

$*$ **42.** Určete, který výraz musíme přičíst k výrazu $\left(5n - 20 + \dfrac{2}{3}\right)$, abychom dostali výraz $\left(7{,}4n + 30 - \dfrac{1}{2}\right)$.

$*$ **43.** Určete výraz, který musíme odečíst od výrazu $\left(\dfrac{2}{5}k^2 - 2k + 0{,}6\right)$, abychom dostali výraz $(0{,}3k^2 + 0{,}5k - 6{,}3)$.

Příklad 4

Vypočítejte:

a) $(4x^2 - 7x + 9) \cdot (-3x)$

b) $(2x - 3)(3x^2 + 5x - 6)$

c) $(3a + 0{,}2)^2 - \left(2a - \dfrac{1}{2}\right)^2$

Řešení

a) $(4x^2 - 7x + 9) \cdot (-3x) = -12x^3 + 21x^2 - 27x$

b) $(2x - 3)(3x^2 + 5x - 6) = 6x^3 + 10x^2 - 12x - 9x^2 - 15x + 18 =$
$= 6x^3 + x^2 - 27x + 18$

c) $(3a + 0{,}2)^2 - \left(2a - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 9a^2 + 1{,}2a + 0{,}04 - \left(4a^2 - 2a + \dfrac{1}{4}\right) =$
$= 9a^2 + 1{,}2a + 0{,}04 - 4a^2 + 2a - 0{,}25 = 5a^2 + 3{,}2a - 0{,}21$

Úlohy

44. Upravte:

a) $(0{,}5a^2 - 3a - 0{,}25) \cdot (4a)$ b) $(6a^2 - 2ab + 0{,}2ab^2) \cdot (-5a^2b)$

45. Upravte:

a) $(3a + 6)(3 - 8b) + (4a + 2)(6b - 9)$

b) $(18a - 24)(b - 3) - (3a - 4)(6b - 18)$

c) $(8a - 7)(b + 2) + (3 - 2a)(4b - 1) + 17$

d) $(3a - 7)(4b - 5) - (6a - 1)(2b + 9) - (a - 26b)$

46. Upravte:

a) $3x - 4\left[3x - 4(3x - 4)\right]$ b) $3x - 4\left[(3x - 4)3x - 4\right]$

c) $(3x - 4)\left[3x - 4(3x - 4)\right]$ d) $(3x - 4)\left[(3x - 4)3x - 4\right]$

86. Zjednodušte:

a) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{4}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x-6}{x+6}+\dfrac{1}{6-x}+\dfrac{3x-5}{x^2-36}$

c) $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{5x}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}$ d) $\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x-7}{3-x}$

87. Zjednodušte:

a) $\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{y^2-y-6}{y^2+4y+4}$ b) $\dfrac{y+1}{y-3}+\dfrac{2(y-3)}{y^2-3(2y-3)}$

88. Zjednodušte:

a) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4y^2}{x^2-y^2}$ b) $\dfrac{1+x}{x+y}-\dfrac{1+x}{y-x}-\dfrac{2y+2xy}{x^2-y^2}$

Příklad 10

Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{1-2x}{3x}\cdot(-6x^2)$ b) $\dfrac{2}{y+z}\cdot(y^2-z^2)$

c) $\dfrac{m-5n}{3m-2n}\cdot(2n-3m)$ d) $\left(\dfrac{1}{r-3s}-\dfrac{3s+r}{9s^2-r^2}\right)\cdot(3s-r)$

Řešení

a) $\dfrac{1-2x}{3x}\cdot(-6x^2)=\dfrac{(1-2x)\cdot(-6x^2)}{3x}=\dfrac{(1-2x)\cdot(-2x)\cdot 3x}{3x}=$

$=(1-2x)\cdot(-2x)=-2x+4x^2=4x^2-2x,\ x\neq 0$

b) $\dfrac{2}{y+z}\cdot(y^2-z^2)=\dfrac{2(y+z)(y-z)}{y+z}=2(y-z),\ y\neq -z$

c) $\dfrac{m-5n}{3m-2n}\cdot(2n-3m)=\dfrac{(m-5n)(2n-3m)}{3m-2n}=$

$=\dfrac{(m-5n)(2n-3m)}{-(2n-3m)}=\dfrac{m-5n}{-1}=5n-m,\ n\neq\dfrac{3}{2}m$

d) $\left(\dfrac{1}{r-3s}-\dfrac{3s+r}{9s^2-r^2}\right)\cdot(3s-r)=\dfrac{3s-r}{r-3s}-\dfrac{(3s+r)(3s-r)}{9s^2-r^2}=$

$=\dfrac{-(r-3s)}{r-3s}-\dfrac{(3s+r)(3s-r)}{(3s+r)(3s-r)}=-1-1=-2,\ r\neq 3s,\ r\neq -3s$

Příklad 4

Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 24 hodiny, druhým, výkonnějším kombajnem za 16 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn začal pracovat o čtyři hodiny později než první kombajn?

Řešení

Za neznámou zvolíme hledaný počet hodin a označíme ji x.

První kombajn sklidí za 1 hodinu obilí z $\frac{1}{24}$ lánu,

druhý kombajn sklidí za 1 hodinu obilí z $\frac{1}{16}$ lánu.

První kombajn pracuje x hodin,
druhý kombajn pracuje $(x-4)$ hodin.

První kombajn sklidí za x hodin obilí z $\frac{x}{24}$ lánu,

druhý kombajn sklidí za $(x-4)$ hodin obilí z $\frac{x-4}{16}$ lánu.

Oba kombajny sklidí obilí z $\left(\frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}\right)$ lánu, což má být celý lán (1 celek).

Sestavíme rovnici:

$$\frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}=1$$

Řešíme rovnici:

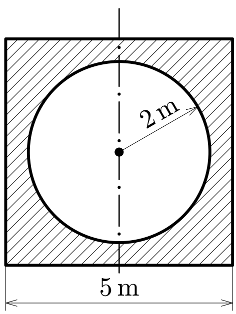
$$\begin{aligned} \frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}&=1 \qquad /\cdot 48\\ 2x+3x-12&=48\\ 5x&=60 \qquad /:5\\ x&=12 \end{aligned}$$

∗ **57.** Kruhový záhon o průměru 8 m se má rozdělit soustřednou kružnicí na kruh a mezikruží se stejným obsahem. určete poloměr této kružnice.

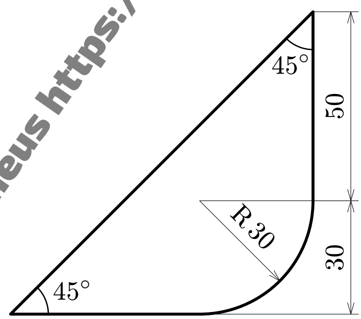
58. Pás plechu 40 cm široký je stočen do tvaru roury a svařen. Jaký je průměr roury, je-li tloušťka plechu zanedbatelná?

59. Kolo lokomotivy má vnější průměr 1,13 m. Kolik otáček vykoná na trati dlouhé 10 km?

60. Poloměr kruhového záhonu je 2 m. Okolo něho je plocha vysypaná pískem, jejíž hranici tvoří strany čtverce o délce 5 m a obvod záhonu. Vypočítejte obsah plochy vysypané pískem (obr. 22).



Obr. 22



Obr. 23

61. Jaký musí být nejmenší průměr kruhu, aby z něho bylo možné vyříznout pravidelný šestiúhelník, který má vzdálenost protilehlých stran 12 cm?

62. Podložka má tvar uvedený na obr. 23. Oblouk je čtvrtkružnice. Vypočítejte obvod a obsah podložky. (Rozměry na obr. 23 jsou udány v milimetrech.)

63. V tenké čtvercové desce se stranou délky 25 cm byly vyříznuty tři kruhové otvory s průměry $d_1 = 2\,\text{cm}$, $d_2 = 4\,\text{cm}$, $d_3 = 20\,\text{cm}$. Vypočítejte obsah desky po vyříznutí otvorů.

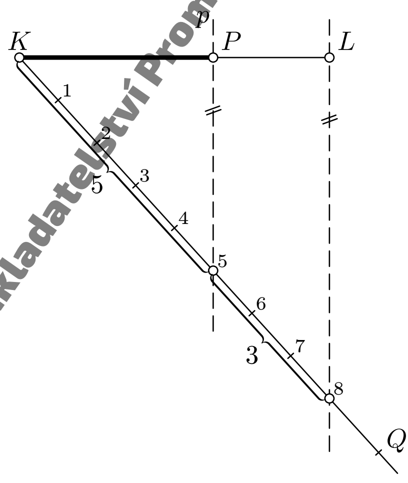
a) $|QR| = 7{,}5\,\text{cm}$;
b) $|PR| = 4{,}5\,\text{cm}$;
c) obvod trojúhelníku PQR má délku 12 cm.

Příklad 5

Úsečku KL délky 8,2 cm rozdělte v poměru 5 : 3.

Řešení

„Rozdělení dané úsečky v poměru $m : n$“ je určení **dvou** úseček, jejichž grafickým součtem je daná úsečka a jejichž délky jsou v poměru 5 : 3. Tyto délky bychom mohli vypočítat: délka první by byla rovna $\frac{5}{8}$ délky úsečky KL, délka druhé by pak byla rovna $\frac{3}{8}$ délky 8,2 cm. Je zřejmé, že pro konstrukční využití bychom nezískali vhodné údaje, neboť např. úsečku délky $\frac{3}{8} \cdot 8{,}2\,\text{cm}$, tj. 3,075 cm, lze těžko přesně nanést. Proto uvedeme vhodnější **konstrukci** (obr. 59):



Obr. 59

56. Dvě kružnice o poloměrech $r_1 = 5\,\text{cm}$, $r_2 = 4\,\text{cm}$ a středech S_1, S_2 se protínají v bodech T_1, T_2. Vypočtěte $|\sphericalangle S_1T_1S_2|$, je-li $|\sphericalangle T_1S_1S_2| = 30°40'$.

Příklad 5

Vypočítejte objem kužele, jestliže úhel při hlavním vrcholu osového řezu má velikost $\beta = 60°$ a strana s kužele má délku 15 cm (obr. 77).

Řešení

Objem kužele vypočítáme podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v,$$

kde $S_p = \pi r^2$ je obsah kruhové podstavy.

Platí:

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{r}{s}, \quad \frac{1}{2}\beta = 60° : 2 = 30°$$

$$r = s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta$$

$$r = 15 \cdot \frac{1}{2}$$

$$r = 7{,}5$$

$$r = 7{,}5\,\text{cm}$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{s}, \quad \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$$

$$v = s \cdot \sin\alpha$$

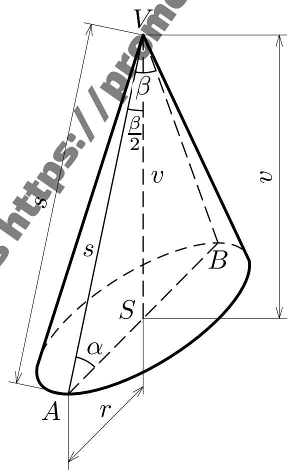
$$v = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v \doteq 13$$

$$v \doteq 13\,\text{cm}$$

$$V \doteq \frac{1}{3}\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 13$$

$$V \doteq 765$$



Obr. 77

Jistina J_3 na konci 2. části úrokovací doby je 51 659,13 Kč.

Výpočet úroku na konci 3. části úrokovací doby:

$J_3 = 51\,659{,}13$ Kč

$p = 12\,\%$ za rok

$p = \dfrac{12\,\%}{360}$ za den

$t = 318$ dnů

$ú = x$ Kč

100 % .... 51 659,13 Kč

1 % .... 516,59 Kč

12 % .... 6 199,08 Kč

$$ú = 6\,199{,}08 \cdot \frac{1}{360} \cdot 318 \text{ Kč} = 5\,475{,}85 \text{ Kč}$$

Zdaněný úrok na konci 3. části úrokovací doby je $0{,}85 \cdot 5\,475,85$ Kč = = 4 654,47 Kč.

Panu Vrbovi bude vyplacena částka 56 314 Kč.

Úlohy

1. Vypočítejte, jak vzrůstá částka a) 1 Kč, b) 100 Kč, c) 1 000 Kč během 10 let při roční úrokové sazbě 5 % a 15% dani z úroků.

2. Na jakou částku vzroste za 1 rok 1 000 Kč uložených při úrokové sazbě a) 4 % p. a., b) 2 % p. s., c) 1 % p. q.? Daň z úroků je 15 %.

3. Na jakou částku vzroste dluh 3 000 Kč za 9 let při roční úrokové sazbě 10 %?

4. Vypočítejte a) bez použití vzorce, b) podle vzorce, na jakou částku vzroste za 4 roky vklad 1 000 Kč při roční úrokové sazbě 4 % a dani z úroků 15 %. Výsledky porovnejte.

5. Pan Novák vyhrál 1 000 000 Kč a uložil je do spořitelny. Roční úroková sazba je 13 % a daň z úroků je 15 %. Kolik Kč vybral na úrocích za 10 let, jestliže a) vybíral úrok každý rok, b) úroky nevybíral?