OBSAH

1. Funkce a její graf 8
1.1 Definice funkce 8
1.2 Graf funkce 12
1.3 Obor hodnot funkce 15
2. Lineární funkce 23
2.1 Definice lineární funkce 23
2.2 Grafy lineárních funkcí při řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav 29
2.3 Rostoucí a klesající funkce 33
2.4 Některé vlastnosti lineárních funkcí 36
3. Funkce s absolutními hodnotami 42
3.1 Funkce absolutní hodnota 42
3.2 Funkce s absolutními hodnotami 44
3.3 Sudá a lichá funkce 49
3.4 Omezená funkce 52
3.5 Maximum a minimum funkce 54
4. Kvadratické funkce 58
4.1 Kvadratická funkce 58
4.2 Grafy kvadratických funkcí 61
4.3 Grafy kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic 70
5. Lineární lomené funkce 75
5.1 Nepřímá úměrnost 75
5.2 Lineární lomená funkce 81
5.3 Racionální a polynomické funkce 86

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

6. Mocninné funkce 89
6.1 Mocninné funkce s přirozeným exponentem 89
6.2 Mocninné funkce s celým exponentem 92
6.3 Inverzní funkce 96
6.4 Definice n-té odmocniny 103
6.5 Počítání s odmocninami 108
6.6 Mocniny s racionálním exponentem 114
6.7 Mocniny s iracionálním exponentem 119

7. Exponenciální a logaritmické funkce 123
7.1 Exponenciální funkce 123
7.2 Exponenciální rovnice 130
7.3 Logaritmická funkce 134
7.4 Logaritmus 138
7.5 Věty o logaritmech 141
7.6 Logaritmické a exponenciální rovnice 145
7.7 Přirozená exponenciální funkce, přirozený logaritmus 151

Výsledky úloh 159

Rejstřík 168

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Přiřaďte ke každé z těchto funkcí její graf, který je na jednom z obrázků 1.6a–d. (Jde opět, obdobně jako na obr. 1.4, vlastně jen o části grafů.) Zdůvodněte své závěry.

1.3 Obor hodnot funkce

1 Vraťte se k obr. 1.4 v článku 1.2. Zapište výčtem množinu všech funkčních hodnot, kterých funkce h nabývá.

Pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $h(x)$ jedno z čísel -1, 0, 1, tj. hledaná množina je $\{-1, 0, 1\}$.

Tuto množinu nazveme obor hodnot funkce h. Je to tedy množina všech takových $y \in \mathsf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in \mathsf{R}$ (z definičního oboru funkce h), pro něž je $y = h(x)$.

> **Obor hodnot** funkce f je množina všech $y \in \mathsf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$.

Obory hodnot funkcí, stejně jako jejich definiční obory, budou stále v centru naší pozornosti. Proto pro ně kvůli stručnosti zápisu zavedeme určité symboly:[1]

$$\begin{aligned} &\text{obor hodnot funkce } f \ \ldots\ \mathsf{H}_f, \\ &\text{definiční obor funkce } f \ \ldots\ \mathsf{D}_f. \end{aligned}$$

Definiční obor a obor hodnot funkce h, kterou jsme sledovali v úvodu článku, můžeme potom zapsat takto:

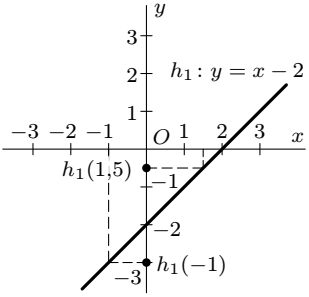
$$\mathsf{D}_h = \mathsf{R}, \quad \mathsf{H}_h = \{-1, 0, 1\}.$$

[1] Používají se také např. symboly $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{D}(f)$.

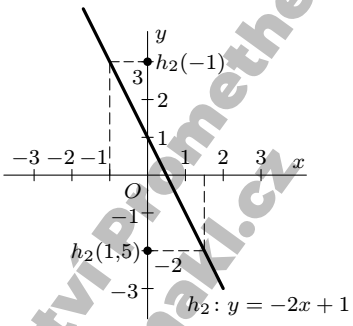
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

2.3 Rostoucí a klesající funkce

Na obr. 2.10a, 2.10b jsou grafy funkcí $h_1\colon y = x - 2$, $h_2\colon y = -2x + 1$.



Obr. 2.10a



Obr. 2.10b

Co lze z grafů těchto funkcí např. vyčíst?

Rostou-li hodnoty proměnné x, rostou i hodnoty funkce $y = x - 2$.

Rostou-li hodnoty proměnné x, klesají hodnoty funkce $y = -2x + 1$.

Co to znamená? Vezmeme-li dvě libovolná x_1, x_2 z definičního oboru funkce, pro která platí

$$x_1 < x_2,$$

pak

$$x_1 - 2 < x_2 - 2, \qquad -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1,$$

čili

$$h_1(x_1) < h_1(x_2). \qquad h_2(x_1) > h_2(x_2).$$

Na obrázcích jsou pro ilustraci zvolena čísla $x_1 = -1$, $x_2 = 1{,}5$.

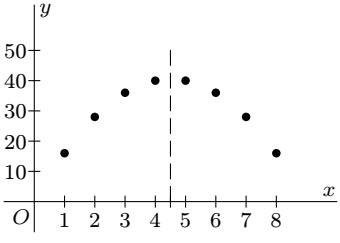
Funkce $h_1\colon y = x - 2$ je příkladem rostoucí funkce.

Funkce $h_2\colon y = -2x + 1$ je příkladem klesající funkce.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheusnakl.cz

2 Pro které $x \in (0, 9)$ bude mít výraz $(18 - 2x) \cdot x$ pravděpodobně největší hodnotu?

Zobrazíme uspořádané dvojice z tabulky do soustavy souřadnic Oxy (obr. 4.2a).



Obr. 4.2a

Obrázek zřetelně ukazuje na symetrické rozložení bodů podle přímky rovnoběžné s osou y a vedené bodem $[4{,}5; 0]$. Odtud se dá usoudit, že hodnota výrazu $(18-2x)\cdot x$ je maximální pro $x = 4{,}5$.

Je tomu ale skutečně tak?

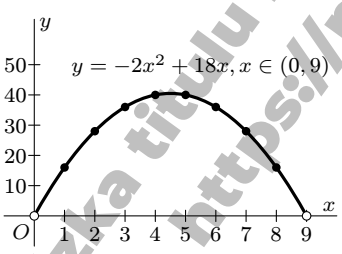
Upravíme výraz $(18-2x)\cdot x$ doplněním na druhou mocninu dvojčlenu:[1]

$$\begin{aligned}(18 - 2x) \cdot x &= -2x^2 + 18x = -2(x^2 - 9x + 4{,}5^2 - 4{,}5^2) = \\ &= -2(x^2 - 9x + 4{,}5^2) + 2 \cdot 4{,}5^2 = -2(x - 4{,}5)^2 + 40{,}5\end{aligned}$$

Výraz $-2(x-4{,}5)^2+40{,}5$ má maximální hodnotu pro $x = 4{,}5$, a to 40,5. Pro každé $x \neq 4{,}5$ je totiž $-2(x-4{,}5)^2 < 0$, a tedy $-2(x - 4{,}5)^2 + 40{,}5 < 40{,}5$.

Závěr: Zemědělec by měl postavit výběh pravoúhelníkového tvaru s „bočními stranami“ o délce 4,5 m.

Závislost $(18 - 2x) \cdot x$ na $x \in (0, 9)$ vyjadřuje funkce



Obr. 4.2b

$$y = (18 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0, 9)$$

neboli funkce

$$y = -2x^2 + 18x, \quad x \in (0, 9).$$

Jde o část kvadratické funkce, graf je na obr. 4.2b.

[1] Chceme dospět k výrazu tvaru $k(x + m)^2 + n$, kde k, m, n jsou reálná čísla.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

4 Délka první parcely je 25 metrů, délka druhé parcely je 37,5 metru, tj. 1,5krát větší. Co lze říci o vzájemném poměru šířek těchto parcel?

Šířka

první parcely: 24 metrů

druhé parcely: 16 metrů

Šířka druhé parcely je 1,5krát menší než šířka první parcely.

Kolikrát se zvětší velikost jedné strany parcely s danou výměrou, **tolikrát se zmenší** velikost strany s ní sousední. Říkáme, že velikost jedné strany parcely je **nepřímo úměrná** velikosti strany s ní sousední.

Funkce (1) je částí funkce nepřímá úměrnost.

> **Nepřímá úměrnost** je každá funkce na množině $\mathsf{R} \setminus \{0\}$ daná ve tvaru
>
> $$y = \frac{k}{x},$$
>
> kde k je reálné číslo různé od nuly.

Nyní se budeme věnovat grafům funkcí nepřímá úměrnost.

Začneme funkcí $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, která je částí nepřímé úměrnosti.

5 Určete hodnoty funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ v bodech 0,1; 0,25; 0,5; 1; 2; 4; 10. Výsledky sestavte do tabulky a obrazy příslušných dvojic zakreslete do soustavy souřadnic Oxy.

---

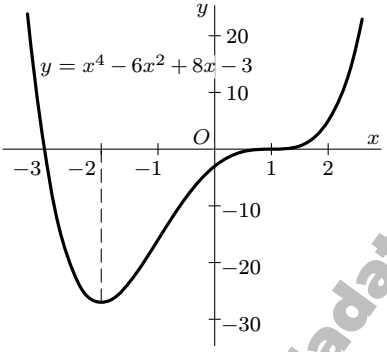
x	0,1	0,25	0,5	1	2	4	10
$\frac{1}{x}$	10	4	2	1	0,5	0,25	0,1

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

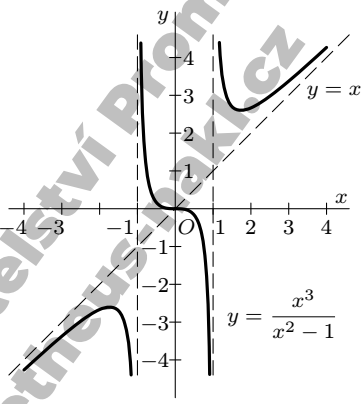
Funkce lineární a kvadratické jsou příklady polynomických funkcí; funkce nepřímá úměrnost je příkladem racionální funkce, která není polynomická.

Pro ilustraci uvádíme ještě dva příklady racionálních funkcí.

Na obr. 5.6 je graf polynomické funkce $y = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$, na obr. 5.7 graf racionální funkce $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, která není polynomická.



Obr. 5.6



Obr. 5.7

Úlohy k opakování

5.14 Obsah pravoúhlého trojúhelníku je $18\,\mathrm{cm}^2$.

a) Zapište funkci, která udává závislost mezi velikostmi odvěsen.

b) Jedna z odvěsen má délku 12 cm. Jaká je délka druhé odvěsny?

c) Obdobný úkol jako v b) řešte pro případ, kdy délka jedné odvěsny je 2,5 cm.

5.15 Proud je při konstantním napětí nepřímo úměrný odporu vodiče. Najděte funkci, která udává tuto závislost, víte-li, že při odporu $380\,\Omega$ je proud 30 mA.

5.16 Ozubené kolo o průměru d mm vykoná n otáček za minutu a zasahuje do jiného ozubeného kola o průměru 400 mm, které se otočí za minutu desetkrát. Nalezněte funkci, jež udává závislost n na d.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheusskolu.cz

Je-li f libovolná funkce, která není prostá[2], pak existuje aspoň jedna dvojice čísel x_1, x_2 z D_f, $x_1 \neq x_2$, tak, že $f(x_1) = f(x_2)$. To ale obráceně znamená, že existuje $y \in \mathsf{H}_f$, jemuž jsou přiřazena dvě různá $x_1, x_2 \in \mathsf{D}_f$, pro která je $f(x_1) = y$ a také $f(x_2) = y$. Takovéto přiřazení není jednoznačné, neurčuje tedy funkci.

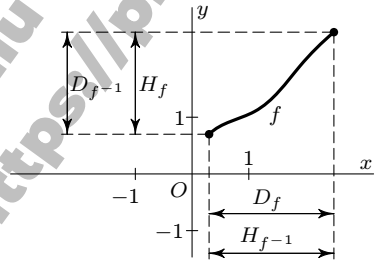
Je-li f funkce prostá[3], pak pro každé $y \in \mathsf{H}_f$ existuje právě jedno $x \in \mathsf{D}_f$, pro které platí $f(x) = y$. (Kdyby totiž existovala dvě různá $x_1, x_2 \in \mathsf{D}_f$, pro něž je $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$, nemohla by funkce f být prostá — ke dvěma různým prvkům z D_f by bylo funkcí f přiřazeno stejné y.) Dostáváme tak novou funkci, kterou nazýváme inverzní funkce k funkci f; označujeme ji zpravidla f^{-1}.

Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1. $\mathsf{D}_{f^{-1}} = \mathsf{H}_f$.
2. Každému $y \in \mathsf{D}_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in \mathsf{D}_f$, pro které je $f(x) = y$.

3 Definiční obor funkce f^{-1} je roven oboru hodnot funkce f. Čemu se rovná obor hodnot funkce f^{-1}?

$\mathsf{H}_{f^{-1}} = \mathsf{D}_f$; celou situaci nám přiblíží obr. 6.7.

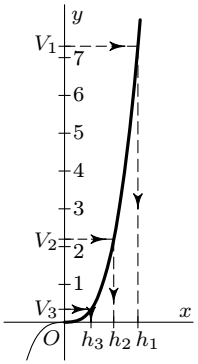


Obr. 6.7

[2] Vezměte si na pomoc např. grafy funkcí $y = |x|$, $y = x^4$.

[3] Můžete si promýšlet např. na grafech funkcí $y = 2x$, $y = x^3$.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz



Obr. 6.12

Funkce $y = x^3$ je v intervalu $\langle 0, +\infty)$ prostá a nabývá v tomto intervalu všech hodnot z množiny $\langle 0, +\infty)$. Z toho plyne: Je-li a libovolné nezáporné číslo, pak existuje právě jedno nezáporné číslo b takové, že $b^3 = a$.

Nezáporné číslo b nazýváme třetí odmocnina z **nezáporného** čísla a; píšeme $b = \sqrt[3]{a}$.

Dá se dokázat, že platí: Ke každému přirozenému číslu n a ke každému **nezápornému** reálnému číslu a existuje **právě jedno nezáporné číslo** b takové, že $b^n = a$.

(Promyslete si toto tvrzení — vezměte na pomoc části grafů funkcí $y = x^n$ pro $x \in \langle 0, +\infty)$ z přehledu v článku 6.1.)

Číslo b, o němž zde hovoříme, se nazývá n-tá odmocnina z čísla a.

> Pro každé $n \in \mathsf{N}$ je **n-tá odmocnina z nezáporného čísla** a takové **nezáporné** číslo b, pro něž platí $b^n = a$. Budeme zapisovat
>
> $$b = \sqrt[n]{a}.$$
>
> Číslo n se nazývá **odmocnitel** (**exponent odmocniny**), číslo a **odmocněnec** (**základ odmocniny**).

Je-li $n = 2$, budeme stručněji, v souladu s dříve zavedeným označením, místo $\sqrt[2]{a}$ psát pouze $\sqrt{a}$.

4 Načrtněte v soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. (Využijte grafy funkcí $y = x^2$, $x \in \langle 0, +\infty)$; $y = x^3$, $x \in \langle 0, +\infty)$.)

Funkce $y = \sqrt{x}$ je inverzní k funkci $y = x^2$, $x \in \langle 0, +\infty)$.

Funkce $y = \sqrt[3]{x}$ je inverzní k funkci $y = x^3$, $x \in \langle 0, +\infty)$.

K náčrtu požadovaných grafů využijeme větu z článku 6.3 o vzájemné poloze grafů funkce a funkce k ní inverzní v soustavě souřadnic Oxy.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
http://prometheus-nakl.cz

a z toho plyne

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}} = a^{\frac{m+p}{n}} = \\ = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}} = a^{r+s}.$$

Tím je důkaz části a) věty proveden.

Příklad 1

Zjednodušte výraz

$$\frac{(x^{\frac{9}{8}} \cdot y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}};$$

x, y, z jsou kladná reálná čísla.

Řešení

$$\frac{(x^{\frac{9}{8}} \cdot y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{(x^{\frac{9}{8}})^{\frac{2}{3}} \cdot (y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{x^{\frac{18}{24}} \cdot y^{\frac{10}{12}} \cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \\ = x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} \cdot z^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \cdot z^{\frac{1}{12}} = (xyz)^{\frac{1}{12}}$$

Příklad 2

Částečně odmocněte $\sqrt[7]{a^{19}}$; předpokládejte, že a je kladné číslo.

Řešení

$$\sqrt[7]{a^{19}} = a^{\frac{19}{7}} = a^{2+\frac{5}{7}} = a^2 \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a^5}$$

S touto úlohou jsme se již setkali v příkladu 2 z článku 6.5; řešili jsme ji pomocí vět o odmocninách.

Příklad 3

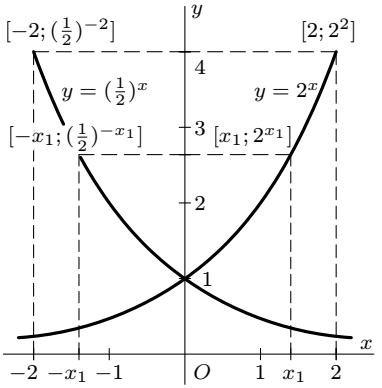
Vyjádřete součin $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^3}$ ve tvaru jediné odmocniny; předpokládejte, že a je kladné číslo.

Řešení

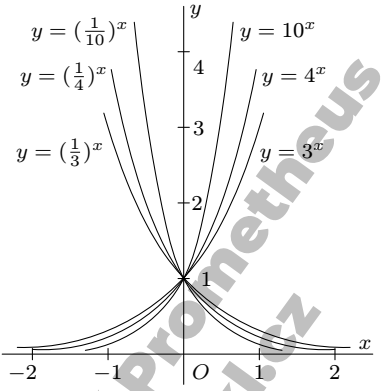
$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}$$

Tato úloha byla již řešena pomocí vět o odmocninách v příkladu 3 z článku 6.5.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz



Obr. 7.3



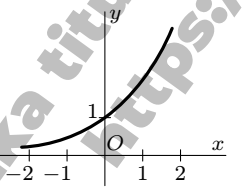
Obr. 7.4

Na obr. 7.4 jsou na ukázku sestrojeny grafy funkcí $y = 3^x$, $y = 4^x$, $y = 10^x$ a dále pak grafy funkcí $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Bez důkazů uvedeme vlastnosti exponenciální funkce $y = a^x$, a to jednak pro $a > 1$, jednak pro $0 < a < 1$.

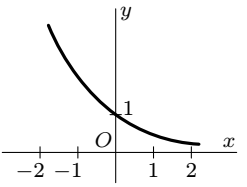
$\boxed{\text{Funkce } y = a^x;\ a \in \mathsf{R}^+ \setminus \{1\}}$

$\boxed{a > 1}$



Definiční obor je R.
Obor hodnot je $(0, +\infty)$.
Je rostoucí, a tedy je prostá.

$\boxed{0 < a < 1}$



Je klesající, a tedy je prostá.

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

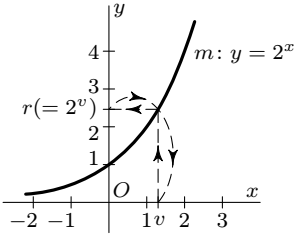
7.4 Logaritmus

Příklad 1

Určete hodnotu funkce $y = \log_2 x$ v bodě 8, tj. $\log_2 8$.

Řešení

Využijeme toho, že funkce $y = \log_2 x$ je inverzní k funkci $y = 2^x$.



Obr. 7.8

Funkcí $m\colon y = 2^x$ (obr. 7.8) je každému $v \in \mathsf{R}$ přiřazeno číslo $r = 2^v$, které patří do R^+, čili $m(v) = r$. Pomocí funkce m^{-1}, tj. funkce inverzní k m, se každému $r \in \mathsf{R}^+$ přiřazuje to $v \in \mathsf{R}$, pro které platí $m(v) = r$.

V našem případě je $r = 8$. Hledáme tedy takové $v \in \mathsf{R}$, pro které je

$$m(v) = 8,$$

čili

$$2^v = 8.$$

Řešením exponenciální rovnice $2^v = 8$ s neznámou $v \in \mathsf{R}$ dostáváme $v = 3$. (Viz též obr. 7.5.) Je tedy

$$m(3) = 8$$

a odtud

$$m^{-1}(8) = 3,$$

čili

$$\log_2 8 = 3.$$

1 Zjistěte obdobným způsobem jako v příkladu 1 $\log_2 4$ a $\log_2 16$.

$\log_2 4 = 2$, $\log_2 16 = 4$.

Uvědomme si, že logaritmus čísla 8 o základu 2 je takové číslo, kterým umocňujeme základ 2, abychom získali číslo 8:

$$2^{\log_2 8} = 8$$

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz