

OBSAH

1. Kombinatorika	7
Úvod	7
1.1 Základní kombinatorická pravidla	8
1.2 Variace	12
1.3 Permutace	17
1.4 Kombinace	24
Shrnutí I	32
Úlohy k opakování	33
1.5 Variace s opakováním	35
1.6 Permutace s opakováním	40
1.7 Kombinace s opakováním	46
Shrnutí II	52
Úlohy k opakování	53
1.8 Vlastnosti kombinačních čísel	56
1.9 Binomická věta	66
Shrnutí III	76
Úlohy k opakování	77
2. Pravděpodobnost	80
2.1 Náhodné pokusy	80
2.2 Množina možných výsledků pokusu	81
2.3 Jevy	83
2.4 Pravděpodobnosti	86
2.5 Pravděpodobnosti jevů	90
2.6 Sčítání pravděpodobností	97
Shrnutí I	103
Úlohy k opakování	104

2.7 Nezávislé jevy (Násobení pravděpodobností)	106
2.8 Nezávislé pokusy	111
2.9 Binomické rozdělení (Bernoulliho schéma)	115
2.10 Podmíněné pravděpodobnosti	120
Shrnutí II	126
Úlohy k opakování	127
3. Statistika	131
3.1 Statistický soubor, jednotka, znak	131
3.2 Rozdělení četností; jeho grafické znázornění	132
3.3 Charakteristiky polohy a variability	137
3.4 Korelace	149
Shrnutí	155
Úlohy k opakování	158
Výsledky úloh	160
Seznam použitých matematických symbolů a značek	168
Rejstřík	170

Obtížnější úlohy jsou v učebnici vyznačeny hvězdičkou.

Připomeňme si, že jsme definovali $0! = 1$, a všimněme si, že zlomek $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ má smysl nejen pro n, k přirozená, $k \leq n$, ale i pro n přirozená a $k = 0$, a dokonce i pro $n = 0, k = 0$; má tedy smysl pro všechna n, k celá nezáporná, $k \leq n$. Pro tento zlomek se používá symbol $\binom{n}{k}$, který se čte „ n nad k “ a nazývá se **kombinační číslo**; definuje se takto:

Pro všechna celá nezáporná čísla $n, k, k \leq n$, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Výsledek, který jsme odvodili pro počet k -členných kombinací z n prvků, lze tedy formulovat následovně:

Počet $K(k, n)$ všech k -členných kombinací z n prvků je

$$K(k, n) = \binom{n}{k}.$$

Z toho, co bylo řečeno, také vyplývá, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny.

Všimněme si dále, že z definice kombinačního čísla dostaneme

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Odvodili jsme tak užitečnou větu:

Úlohy k opakování

*Nikdy neberte rozum do hrsti;
mohli byste zjistit, že je prázdná!*

- 1.72** Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova Mississippi; kolik z nich nezačíná písmenem M?
- *1.73** Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- *1.74** Knihovna má pět regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih.
[Návod: Myslete si, že regály jsou umístěny vedle sebe a každé dva sousední jsou odděleny stejným předmětem.]
- 1.75** V samoobsluze mají čtyři druhy kávy, každý po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 gramů kávy, jestliže
- balíčků každého druhu mají dostatečný počet;
 - od dvou druhů mají deset balíčků a od zbývajících dvou pouze po čtyřech balíčcích.
- *1.76** Určete, kolika způsoby lze z padesáticentových a jednoeurových mincí zaplatit částku a) 6 €, b) 2 €, jsou-li oba druhy mincí k dispozici v dostatečném množství.
[Návod: Každou částku lze zašifrovat pomocí písmen e (eurové mince) a p (dvě padesáticentové mince); např. čtyřem eurovým a čtyřem padesáticentovým mincím odpovídá zápis $eeeepp$.]
- *1.77** Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek.
[Návod: Každé rozdělení osmi jablek mezi tři osoby A , B , C lze zašifrovat pomocí neuspořádané osmice z těchto písmen; např. $AAABBBBC$ značí přiděl tří jablek osobě A , čtyř jablek osobě B a jednoho jablka osobě C .]
- 1.78** Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek.
[Návod: Rozdělení jablek a hrušek jsou na sobě nezávislá, dále pak viz předchozí příklad.]

Příklad 3

Určete desátý člen binomického rozvoje výrazu

$$\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}.$$

Řešení

Binomický koeficient u desátého členu je $\binom{12}{9}$, takže desátý člen binomického rozvoje daného výrazu má tvar:

$$\binom{12}{9}(5x^3)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 = -\frac{12!}{9!3!}5^3x^9\frac{2^4\sqrt{2}}{x^9} = -44 \cdot 10^4\sqrt{2}.$$

Příklad 4

Určete součet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, kde n je libovolné celé nezáporné číslo.

Řešení

Jestliže v binomické větě pro dvojčlen $(a+b)$ položíme $a = b = 1$, dostaneme:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Vzhledem k tomu, že $(1+1)^n = 2^n$, máme výsledek:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Důsledek: Protože kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny (pro $k=0$ jde o prázdnou množinu), udává uvedený součet počet všech podmnožin n -prvkové množiny. Odvodili jsme tedy jiným způsobem než v příkladu 2 článku 1.5, že **n -prvková množina má 2^n podmnožin.**

Řešení

ω	1	2	3	4	5	6
$n(\omega)$	5	3	4	6	0	7
$\frac{n(\omega)}{n}$	0,20	0,12	0,16	0,24	0,00	0,28

(Mimo matematiku se relativní četnosti obvykle vyjadřují v procentech; zde tedy jednička padla ve 20 % případů, dvojka ve 12 % atd.)

Nyní již přistoupíme k vysvětlení pojmu pravděpodobnosti.

Před zahájením utkání v kopané se losuje, které mužstvo bude mít výkop, resp. volbu strany hřiště. Losování provede rozhodčí tak, že hodí mincí, když předtím přidělil jednomu mužstvu líc a druhému rub. Spravedlivost tohoto postupu vůči oběma mužstvům je založena na našem přesvědčení, že oba možné výsledky hodu mincí, líc a rub, jsou stejně možné, stejně pravděpodobné. Přitom toto přesvědčení samo je zase založeno jednak na úvaze, že není důvod, proč by padnutí jedné strany mince mělo být pravděpodobnější než druhé, jednak na zkušenosti, která ukazuje, že relativní četnosti obou výsledků jsou skutečně přibližně stejné, provedeme-li velký počet hodů.

To, že oba možné výsledky hodu mincí, líc i rub, jsou stejně pravděpodobné, popisujeme slovy, že pravděpodobnost padnutí líce i pravděpodobnost padnutí rubu je $\frac{1}{2}$. Podobně při hodu kostkou je pro každé z čísel 1, 2, ..., 6 pravděpodobnost padnutí rovna $\frac{1}{6}$.

Obecně, má-li náhodný pokus m možných výsledků a jsou-li tyto výsledky stejně možné, stejně pravděpodobné, pak o každém z nich řekneme, že má **pravděpodobnost** $\frac{1}{m}$.

- a) 10 losů,
b) 20 losů?
- *2.17** Vylosujeme 3 čísla z čísel 1, 2, ..., 100. Jaká je pravděpodobnost, že tažená čísla se dají uspořádat v aritmetickou posloupnost?
- 2.18** Hodíme šesti kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padnou vesměs různá čísla,
b) padnou vesměs sudá čísla?
- 2.19** Na šachovnici postavíme náhodně dvě věže, bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že se mohou navzájem brát?
- 2.20** Odběratel dostává každý týden dodávku 50 kusů nějakého zboží. Dodávku přijme, jestliže mezi namátkou vybranými a zkontrolovanými 10 kusy není ani jeden vadný. Jaká je pravděpodobnost, že dodávka bude přijata, obsahuje-li ve skutečnosti
a) 5 vadných,
b) 10 vadných kusů?

2.6 Sčítání pravděpodobností

Vždycky vyhraje někdo jiný.

Nechť jevy A a B se navzájem vylučují, tj. $A \cap B = \emptyset$. Počítejme pravděpodobnost jejich sjednocení:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) = P(A) + P(B).$$

Slovy:

Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem se vylučujících jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností.

Tuto poučku lze indukcí rozšířit na libovolný počet r sčítanců ($r \geq 2$):

Řešení

Jev A nechť značí „prochází proud“, jevy A_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, nechť značí „ i -tý spínač je zapnut“. Zřejmě je

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5 \cap A_6).$$

Protože jde o sjednocení dvou jevů, které se vzájemně nevylučují, máme

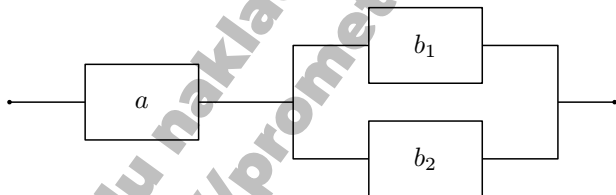
$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \doteq 0,234.$$

Úlohy

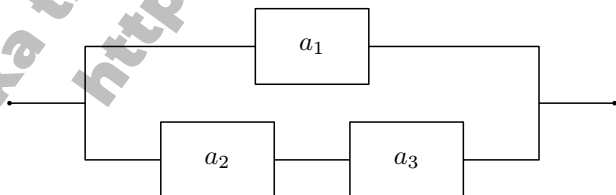
- 2.49** Přerušení elektrického obvodu může nastat následkem poruchy členu a nebo následkem poruchy obou členů b_1, b_2 (obr. 2.6). Poruchy členů a, b_1, b_2 nechť jsou nezávislé jevy A, B_1, B_2 s pravděpodobnostmi

$$P(A) = 0,03; \quad P(B_1) = 0,2; \quad P(B_2) = 0,2.$$

Určete pravděpodobnost přerušení obvodu.



Obr. 2.6



Obr. 2.7

To pak znamená, že musíme „staré“ pravděpodobnosti $p(\omega)$ nahradit „novými“, které označíme $p(\omega|B)$ a nazveme podmíněnými pravděpodobnostmi za podmínky B . Zřejmě musíme klást

$$p(\omega|B) = 0 \quad \text{pro } \omega \notin B,$$

protože tyto výsledky již nemohou nastat; pravděpodobnosti výsledků $\omega \in B$ pak musíme úměrně zvětšit, aby jejich součet byl opět roven jedné, tedy

$$p(\omega|B) = \frac{p(\omega)}{P(B)} \quad \text{pro } \omega \in B.$$

(Uvažujeme vždy jen jev B s nenulovou pravděpodobností — nesmíme dělit nulou.)

Podmíněná pravděpodobnost libovolného jevu A za podmínky B je pak definována obvyklým způsobem jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A , tedy

$$P(A|B) = \sum_{\omega \in A} p(\omega|B).$$

Dosadíme-li zde za $p(\omega|B)$, dostaneme

$$P(A|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{p(\omega)}{P(B)},$$

tj.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Jde-li o pokus se stejně pravděpodobnými výsledky, je $P(A \cap B) = \frac{m(A \cap B)}{m}$, $P(B) = \frac{m(B)}{m}$ a po dosazení do (1) je tedy

$$P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)},$$

kde $m(X)$ značí počet výsledků příznivých jevu X .

Jsou-li jevy A , B nezávislé, pak ze vzorce (1) ihned vyplývá, že $P(A|B) = P(A)$ a také $P(B|A) = P(B)$. Tedy nastání jevu B nezmění pravděpodobnost jevu A a naopak.

Někdy se statistický soubor skládá z několika dílčích souborů, řekněme A, B, C, D. Známe počty jednotek n_A, n_B, n_C, n_D v dílčích souborech a průměry $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C, \bar{x}_D$ znaku x v dílčích souborech; chceme určit průměr $\bar{x}$ v celém souboru. Určíme nejprve součet všech hodnot znaku v celém souboru, ten se rovná $\bar{x}_A n_A + \bar{x}_B n_B + \bar{x}_C n_C + \bar{x}_D n_D$; pak určíme počet všech jednotek v souboru, ten je $n_A + n_B + n_C + n_D$. Odtud

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_A n_A + \bar{x}_B n_B + \bar{x}_C n_C + \bar{x}_D n_D}{n_A + n_B + n_C + n_D}. \quad (1)$$

Příklad 3

Ve škole jsou čtyři 6. třídy, označené A, B, C, D; počty žáků a průměrné známky z matematiky jsou uvedeny v tabulce. Určete průměrnou známku z matematiky ve všech 6. třídách dohromady.

třída	A	B	C	D
průměrná známka z matematiky	2,21	1,82	2,33	2,11
počet žáků	28	24	32	30

Řešení

Průměrnou známku z matematiky ve všech 6. třídách dohromady určíme podle vzorce (1):

$$\bar{x} = \frac{2,21 \cdot 28 + 1,82 \cdot 24 + 2,33 \cdot 32 + 2,11 \cdot 30}{28 + 24 + 32 + 30} = \frac{243,42}{114} \doteq 2,14$$

Zlomku ve vzorci (1) říkáme vážený průměr čísel $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C, \bar{x}_D$ s váhami n_A, n_B, n_C, n_D . Obecně, **vážený průměr** čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ s váhami $v_1 > 0, v_2 > 0, \dots, v_n > 0$ je číslo

$$\bar{u}_V = \frac{\sum_{j=1}^n u_j v_j}{\sum_{j=1}^n v_j}.$$

3.4 Korelace

Statistikové zjistili, že je kladná korelace mezi výskytem čápů a počtem narozených dětí.

Zatím jsme se zabývali popisem jediného znaku, nebo zjišťuje-li se více znaků, popisem každého z nich samostatně. Nyní se budeme zabývat popisem **dvojice znaků** (x, y) . Výsledkem šetření v souboru o rozsahu n jsou pak data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Může jít např. o $n = 15$ evropských zemí, z nichž máme data o roční spotřebě alkoholu (v litrech čistého alkoholu) na 1 obyvatele (znak x) a o ročním počtu úmrtí na cirhózu jater a alkoholismus na 100 000 obyvatel (znak y).

Vedle charakteristik polohy a variability, počítaných pro každý z obou znaků zvlášť, zajímáme se zde ještě (a někdy hlavně) o míru **statistické závislosti obou znaků**. Volíme-li za charakteristiky polohy aritmetické průměry $\bar{x}$ a $\bar{y}$ a za charakteristiky variability směrodatné odchylky s_x a s_y , pak za charakteristiku závislosti volíme zpravidla **koefficient korelace** r_{xy} . Je definován vzorcem

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x \cdot s_y}. \quad (1)$$

Čitatele zlomku lze upravit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}; \end{aligned} \quad (2)$$

poslední výraz je výhodnější pro ruční výpočet.

Příklad 1

15 chlapců (studentů poslední třídy gymnázia) bylo vyzváno, aby uvedli svoji tělesnou výšku (znak x) a tělesnou výšku otce (znak y). Byly