OBSAH

PŘEDMLUVA

Mladí přátelé,

hned v úvodu bychom rádi vyvrátili rozšířený omyl, že ke zvládnutí školské matematiky jsou nutné velké schopnosti a zvláštní nadání. NENÍ TO PRAVDA! Ti, kteří tuto myšlenku zastávají, tím pouze zdůvodňují své nedostatky a zakrývají vlastní pohodlnost! Odvoláváte-li se na studentské pořekadlo „Matematika je věda, která se naučit nedá“, uvědomte si, že vzniklo v době, kdy převažovalo učení zpaměti a mechanické biflování. Tímto způsobem se matematika skutečně naučit nedá! Bohužel však žádný univerzální recept, jak se matematika naučit dá, neexistuje. Nejste-li však duševně pohodlní a nebojíte-li se překážek, přijdete sami na vlastní způsob, jak matematické učivo zvládnout. Byli bychom rádi, kdyby tato učebnice, ve které si prohloubíte učivo ze základní školy a seznámíte se s některými novými partiemi, vám v tom byla nápomocna. V jejím studiu vám přejeme hodně úspěchů.

Autoři

Poznámka: Plné trojúhelníčky ▼▲ na okrajích stránek znamenají, že učivo vyložené v řádcích mezi nimi je rozšiřující; těžší příklady jsou označeny křížkem před číslem příkladu.

jednoznačně určena, neboť čísla 0, 1, 2 jsou prvky např. těchto množin:

$$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{-1, 0, 1, 2, 3\}, \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \pi, 2\}, \text{ atd.}$$

K vyjádření okolnosti, že x je prvkem množiny A, používáme zápis $x \in \mathsf{A}$; není-li x prvkem množiny A, píšeme $x \notin \mathsf{A}$. Pro množinu $\mathsf{M} = \{0, 1, 2\}$ platí tedy např.

$$1 \in \mathsf{M}, 0 \in \mathsf{M}, 2 \in \mathsf{M}, 5 \notin \mathsf{M}, -3 \notin \mathsf{M}, \pi \notin \mathsf{M},$$

neplatí však $\{2\} \in \mathsf{M}$, neboť množina $\{2\}$ není prvkem množiny $\{1, 2, 3\}$. Je neustále třeba rozlišovat mezi množinou a jejími prvky: 1 je číslo, $\{1\}$ je množina číslo 1 obsahující; $\{0\}$ je jednoprvková množina obsahující nulu a nelze ji s číslem 0 zaměňovat.

Pro některé často používané číselné množiny budeme používat následující označení:

Množina	Označení	Některé její prvky
všech přirozených čísel	N	1, 2, 3, 4, 5
všech celých nezáporných čísel	N_0	0, 1, 2, 3, 4, 5
všech celých čísel	Z	$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3$
všech racionálních čísel	Q	$0, 1, -1, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3},$
všech reálných čísel	R	$0, 1, -1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi$

Slůvko *všech* vyskytující se v názvu množiny N, N_0, Z, Q i R je důležité; množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{17, 100, 123\}$, $\{1, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $\{20\}$, jsou sice množiny přirozených čísel, žádná z nich však není množinou všech přirozených čísel.

Důležitou množinou, bez níž se v matematice neobejdeme, je množina, která nemá žádný prvek. Nazýváme ji **prázdná množina** a značíme symbolem $\emptyset$.

Některé množiny můžeme zapsat i jiným způsobem než výčtem prvků, a to pomocí vlastností jejích prvků. Např. o množině $\{1, 2, 3, 4\}$ můžeme hovořit též jako o množině všech přirozených čísel menších než pět, což budeme zapisovat takto:

$$\{x \in \mathsf{N}; x < 5\}$$

Podobně množinu $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ můžeme vyjádřit jako množinu všech celých čísel, jejichž druhá mocnina není větší než devět

Z definice odvodíme následující věty:
Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a pro každá přirozená čísla r, s platí:

$$\boxed{a^r \cdot a^s = a^{r+s}} \qquad \boxed{(a^r)^s = a^{rs}}$$

(Věta o násobení mocnin se stejným základem)
Např.: $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$
$2 \cdot 2^4 = 2^5$

(Věta o umocňování mocniny)
Např.: $(10^3)^2 = 10^6$
$(2^2)^4 = 2^8$

Věty dokážeme velice snadno; jsou-li r, s přirozená a a libovolné reálné číslo, platí:

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ činitelů}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r+s \text{ činitelů}} = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{s \text{ činitelů}} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{r \text{ činitelů}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{r \text{ činitelů}}}_{s \text{ závorek}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{rs \text{ činitelů}} = a^{rs}$$

Věty tedy platí pro každá r, s přirozená a pro každé reálné $a \neq 0$.

Pro každá reálná čísla $a, b \neq 0$ a pro každé přirozené číslo n platí:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

(Věta o umocňování součinu)
Např.: $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$
$(2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3$

(Věta o umocňování podílu)
Např.: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$
$\left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3}$

Je-li totiž n přirozené číslo, potom pro každá a, $b \in \mathrm{R}$ platí:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ závorek}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ činitelů}} = a^n \cdot b^n$$

3. Zapište výrazy:

a) součet druhých mocnin proměnných a, b;

b) druhá mocnina součtu proměnných a, b;

c) k proměnné x přičtu číslo 4 a výsledek násobím číslem, které je o 4 menší než daná proměnná; k tomuto součinu přičtu 15 a výsledek dělím číslem o 1 menším než je daná proměnná.

4. Udejte, kdy mají smysl následující výrazy.

a) $\dfrac{2-x}{2x}$ b) $\dfrac{3}{4x^2}$ c) $-\dfrac{1}{x-1}$

d) $\dfrac{x+2}{(x-2)(x-3)}$ e) $\dfrac{4}{x^2+1}$ f) $\sqrt{x-7}$

g) $\sqrt{x^2+3}$

2.2 Počítání s mnohočleny

Nejdříve obrátíme svoji pozornost na zopakování operací s mnohočleny. Připomeňme si na několika příkladech, jak se mnohočleny sčítají, odčítají, násobí a jak se dělí mnohočlen jednočlenem.

Příklad 1

Sečtěte mnohočleny $2a^2b^3 + 3ab + 5a + 7b$, $7a + 3b + 3a^2b + a^2b^3$.

Řešení

$(2a^2b^3 + 3ab + 5a + 7b) + (7a + 3b + 3a^2b + a^2b^3) =$
$= (2a^2b^3 + a^2b^3) + 3ab + (5a + 7a) + (7b + 3b) + 3a^2b =$
$= 3a^2b^3 + 3ab + 12a + 10b + 3a^2b$

b) $\dfrac{ax-a}{x+1}-\dfrac{ax+a}{x-1}$

c) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1-x^2}$

d) $\dfrac{30a}{9a^2-1}+\dfrac{4}{3a-1}-\dfrac{5}{3a+1}$

e) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\dfrac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$

2.9 Násobení lomených výrazů

Lomené výrazy násobíme tak, že součin čitatelů dělíme součinem jmenovatelů. Při násobení lomených výrazů vždy pokud možno nejprve krátíme.

Příklad 40

Vypočítejte $\dfrac{75ab^2}{9x^2y^2}\cdot\dfrac{3x^3}{25a^2b}$.

Řešení. Dané výrazy mají smysl pro $x\neq 0$, $y\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{75ab^2}{9x^2y^2}\cdot\frac{3x^3}{25a^2b}=\frac{3b}{3y^2}\cdot\frac{x}{a}=\frac{b}{y^2}\cdot\frac{x}{a}=\frac{xb}{ay^2}$$

Příklad 41

Vypočítejte $\dfrac{(x-1)^2}{y^3}\cdot\dfrac{(x+1)y^2}{x-1}$.

Řešení. Dané výrazy mají smysl pro $y\neq 0$, $x\neq 1$; za těchto předpokladů platí:

$$\frac{(x-1)^2}{y^3}\cdot\frac{(x+1)y^2}{x-1}=\frac{x-1}{y}\cdot\frac{x+1}{1}=\frac{x^2-1}{y}$$

Příklad 42

Vypočítejte $(a^2-1)\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a-1}-1\right)$.

3.4 Podobnost

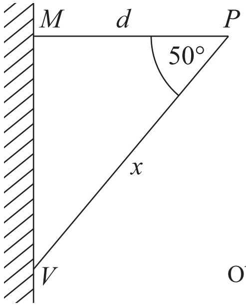
Zobecněním pojmu shodnosti, který jsme si připomněli v předcházejícím odstavci, je pojem podobnosti rovinných útvarů. Názorná představa tohoto pojmu vyplývá z každodenní zkušenosti – podobné jsou např. obrázek ve filmovém okénku a jeho zvětšený obraz na plátně nebo obrazec narysovaný na tabuli a jeho zmenšený obraz v sešitu. Podobnými útvary jsou rovněž každé dva rovnostranné trojúhelníky, každé dva čtverce, každé dvě kružnice atd. Zřejmě lze z každých dvou podobných útvarů získat útvary shodné zvětšením nebo zmenšením všech rozměrů jednoho z nich v určitém poměru. Tuto představu o podobnosti rovinných útvarů si zpřesníme pomocí definice podobného zobrazení v rovině.

Podobné zobrazení (podobnost) v rovině nazýváme každé zobrazení v rovině takové, že existuje reálné číslo $k > 0$ **tak, že pro libovolné body** A, B **dané roviny a jejich obrazy** A', B' platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$. **Číslo** k **se nazývá poměr podobnosti**.

Z definice podobného a shodného zobrazení vyplývá, že shodnost je zvláštním případem podobnosti, neboť podobnost s poměrem podobnosti $k = 1$ je zřejmě shodnost. Příkladem podobného zobrazení v rovině je stejnolehlost, které je věnován poslední článek této kapitoly.

Dva geometrické útvary jsou podobné právě tehdy, když existuje podobné zobrazení, v němž jeden z obou útvarů je obrazem druhého.

K zápisu podobnosti dvou útvarů používáme, jak jistě víte, znaku ~. Vzhledem k tomu, že se často setkáváme s úlohami, při jejichž řešení se užívají vlastnosti trojúhelníků, je někdy nutno umět rozhodnout o jejich podobnosti. Místo obecné definice podobnosti dvou geometrických útvarů bývá vhodnější použít **věty o podobnosti trojúhelníků**, které jsou z této definice a z vlastností podobného zobrazení odvozeny. Tyto věty jsou známy z učiva základní školy, takže si je pouze připomeneme.



Obr. 4.12

a z toho

$$x = \frac{d}{\cos 50°}.$$

Po dosazení dostaneme:

$$x \doteq \frac{95 \text{ cm}}{0{,}642\,8}$$

$$x \doteq 148 \text{ cm}$$

Délka šikmého ramene je přibližně 1,48 m.

Příklad 5

Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dáno $c = 17$ m, $b = 8$ m.
Řešení. Délku strany a určíme pomocí Pythagorovy věty, velikost úhlu α pomocí funkce kosinus, velikost úhlu β ze vztahu $\alpha + \beta = 90°$:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} \text{ m} = \sqrt{289 - 64} \text{ m} = \sqrt{225} \text{ m} = 15 \text{ m}$$

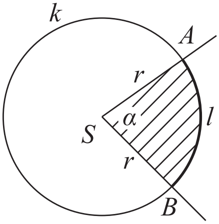
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{8}{17} \doteq 0{,}470\,6, \text{ takže } \alpha \doteq 61°\ 56'$$

$$\beta = 90° - \alpha \doteq 90° - 61°\ 56' = 28°\ 04'$$

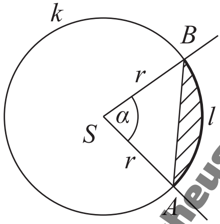
Délka zbývající odvěsny je 15 m, vnitřní úhly mají velikost 61° 56′ a 28° 04′.

Příklad 6

Vypočtěte délky stran rovnoramenného trojúhelníku ABC, je-li dáno $v_c = 8{,}4$ cm, úhel při základně $\alpha = 32°\ 10'$ (obr. 4.13).
Řešení. Výška v_c půlí základnu c rovnoramenného trojúhelníku ABC.



Obr. 4.37



Obr. 4.38

úseč určena jednoznačně. Ze základní školy víme, že obsah kruhu o poloměru r (průměru d) se vypočte podle vzorce:

$$\boxed{S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}}$$

Obsah kruhové výseče s úhlem 1° je roven $\frac{\pi r^2}{360}$; obsah kruhové výseče se středovým úhlem α stupňů je

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$

Má-li úhel velikosti α stupňů v míře obloukové velikost β, lze tento vztah upravit takto (viz článek 4.1):

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{1}{2} r^2\beta$$

Označíme-li délku příslušného oblouku l, pak pro obsah kruhové výseče platí

$$S = \frac{1}{2} rl.$$

Obsah kruhové úseče je roven rozdílu obsahu S_1 výseče se středovým úhlem α_0 a obsahu S_2 rovnoramenného trojúhelníku ABS (obr. 4.38). Je tedy

$$S = S_1 - S_2.$$

Obsah kruhové výseče je

$$S_1 = \frac{1}{2} r^2\beta,$$

obsah rovnoramenného trojúhelníku ABS je

$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \sin\beta.$$