OBSAH

PŘEDMLUVA

Tato učebnice, která vás bude provázet matematikou v dalších měsících školního roku, je věnována především lineárním a kvadratickým rovnicím, nerovnicím a jejich soustavám, mocninám a odmocninám.

Mnohé z toho, co je v učebnici uvedeno, už znáte (např. co je to lineární funkce a jak se užívá její graf při řešení lineárních rovnic, jak se řeší lineární rovnice a nerovnice početně atd.). Budete mít tedy možnost důkladně si připomenout a zopakovat všechny poznatky o rovnicích, nerovnicích, mocninách a odmocninách získané v hodinách matematiky na základní škole. Pak se budete moci lépe a plněji soustředit na učivo nové.

V učebnici se seznámíte s řadou dalších typů úloh z okruhu rovnic, nerovnic a jejich soustav a s různými metodami jejich řešení (početními i grafickými). Ukážeme si také, jak lze získané poznatky užít při řešení jednoduchých aplikací z technické praxe i z běžného denního života.

V učebnici jsou zařazena cvičení, při jejichž řešení si budete moci ověřit, jak jste příslušnou partii zvládli a pochopili. Složitější cvičení jsou označena křížkem. Znaky ▼, ▲ vyznačují rozšiřující učivo.

Při práci s učebnicí vám přejeme hodně zdaru.

Autoři

Funkce, jejíž graf je na obr. 1.8a), je částí konstantní funkce $y = 2$, $t \in \mathsf{R}$ (viz obr. 1.8b)).

Funkce, jejíž graf je na obr. 1.9a), je částí lineární funkce $y = 2t$, $t \in \mathsf{R}$ (viz obr. 1.9b)).

Konstantní funkce je každá funkce, vyjádřená ve tvaru

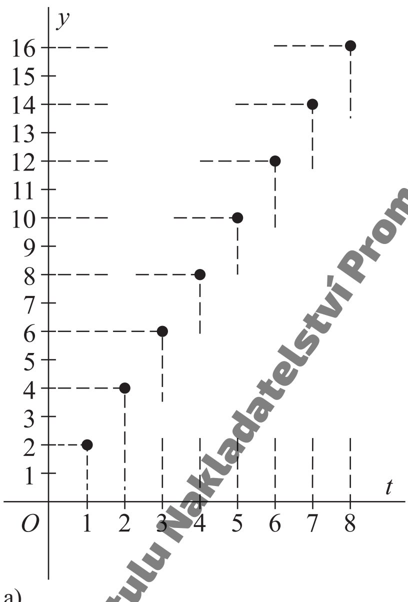
$$y = b,\ x \in \mathsf{R},\ (*)$$

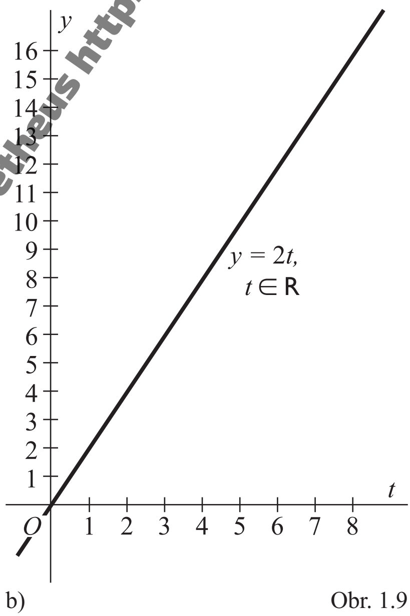
kde b **je reálné číslo**.

Lineární funkce je každá funkce, vyjádřená ve tvaru

$$y = ax + b,\ x \in \mathsf{R},\ (+)$$

kde a **je reálné číslo různé od nuly**, b **je libovolné reálné číslo.**





Obr. 1.9

Všimněme si, že číslo $\frac{13}{4}$ je různé od 2.

Zkouška

$$\left.\begin{array}{l} l\left(\frac{13}{4}\right)=\dfrac{\frac{13}{4}+3}{\frac{13}{4}-2}=\dfrac{\frac{13+12}{4}}{\frac{13-8}{4}}=\frac{25}{5}=5 \\ \\ p\left(\frac{13}{4}\right)=5 \end{array}\right\} \; l\left(\frac{13}{4}\right)=p\left(\frac{13}{4}\right)$$

Číslo $\frac{13}{4}$ je tedy skutečně kořenem rovnice (1).

Příklad 12

Řešte rovnici

$$\frac{2z-1}{5-z}+4=\frac{3+2z}{z-2} \tag{2}$$

o neznámé $z \in \mathrm{R}$.

Řešení. Výraz na levé (pravé) straně rovnice (2) má smysl jen tehdy, je-li $z \neq 5$ ($z \neq 2$). **Přejdeme proto k řešení rovnice (2) v množině** $\mathrm{R} \setminus \{2, 5\}$; zde už jsou hodnoty dvojčlenů $5-z$ a $z-2$ vždy různé od nuly.

Obě strany rovnice vynásobíme mnohočlenem $(5-z)(z-2)$, který je společným násobkem dvojčlenů $5-z$, $z-2$; pak postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech:

$$\frac{2z-1}{5-z}+4=\frac{3+2z}{z-2} \qquad \mid \cdot(5-z)(z-2)$$

$$\left(\frac{2z-1}{5-z}+4\right)(5-z)(z-2)=\frac{3+2z}{z-2}(5-z)(z-2)$$

$$(2z-1)(z-2)+4(5-z)(z-2)=(3+2z)(5-z)$$

$$2z^2-z-4z+2+20z-4z^2-40+8z=15+10z-3z-2z^2$$

$$-2z^2+23z-38=-2z^2+7z+15 \qquad \mid +2z^2$$

$$23z-38=7z+15 \qquad \mid +(-7z+38)$$

$$16z=53 \qquad \mid \cdot\frac{1}{16}$$

$$z=\frac{53}{16}$$

$4 - 2x \geqq 0$ pro všechna $x \leqq 2$ … $|4 - 2x| = 4 - 2x$,
$4 - 2x \leqq 0$ pro všechna $x \geqq 2$ … $|4 - 2x| = -(4 - 2x)$.

Rovnici (1) budeme řešit postupně v intervalech $(-\infty; -3\rangle$, $\langle -3; 2\rangle$, $\langle 2, +\infty)$. Zjistíme množiny řešení těchto tří rovnic; množina řešení rovnice (1) pak bude jejich sjednocením. Při sestavování jednotlivých rovnic nám pomůže tabulka (B):

	$(-\infty; -3\rangle$	$\langle -3; 2\rangle$	$\langle 2; +\infty)$
$\lvert x + 3\rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$\lvert 4 - 2x\rvert$	$4 - 2x$	$4 - 2x$	$2x - 4$

(B)

Řešíme rovnici
$|x + 3| = |4 - 2x|$
o neznámé $x \in \mathsf{R}$:

$x \in (-\infty; -3\rangle$:
$$-x - 3 = 4 - 2x$$
$$x = 7$$
$$\mathsf{P}_1 = \emptyset$$

$x \in \langle -3; 2\rangle$:
$$x + 3 = 4 - 2x$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$
$$\mathsf{P}_2 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$x \in \langle 2; +\infty)$:
$$x + 3 = 2x - 4$$
$$-x = -7$$
$$x = 7$$
$$\mathsf{P}_3 = \{7\}$$

Množina řešení rovnice (1)
o neznámé $x \in \mathsf{R}$ je rovna
$$\mathsf{P}_1 \cup \mathsf{P}_2 \cup \mathsf{P}_3 = \left\{\frac{1}{3}; 7\right\}.$$

Zkouška

$$\left.\begin{aligned} l\left(\frac{1}{3}\right) &= \left|\frac{1}{3} + 3\right| = 3\frac{1}{3} \\ p\left(\frac{1}{3}\right) &= \left|4 - \frac{2}{3}\right| = 3\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \quad l\left(\frac{1}{3}\right) = p\left(\frac{1}{3}\right)$$

Sestrojíme obrazy vypsaných dvojic v kartézské soustavě souřadnic (viz obr. 2.1).

Dá se dokázat, že funkce h je „spojitá“ v celém definičním oboru. Zhruba řečeno to znamená, že grafem funkce h je plynulá, nepřerušovaná křivka (viz obr. 2.2), která prochází samozřejmě všemi jedenácti body, které byly sestrojeny na obr. 2.1.

Příklad 2

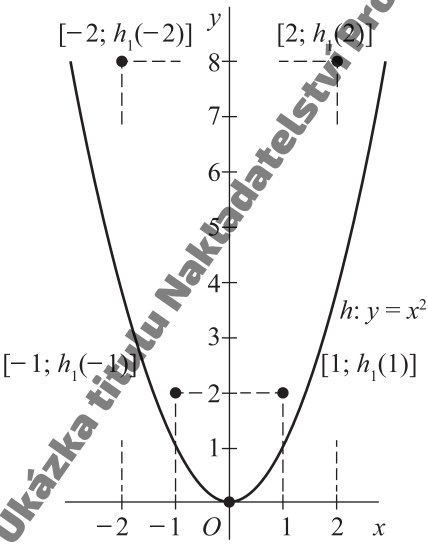
Sestrojte grafy těchto kvadratických funkcí:

a) h_1: $y = 2x^2$ b) h_2: $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

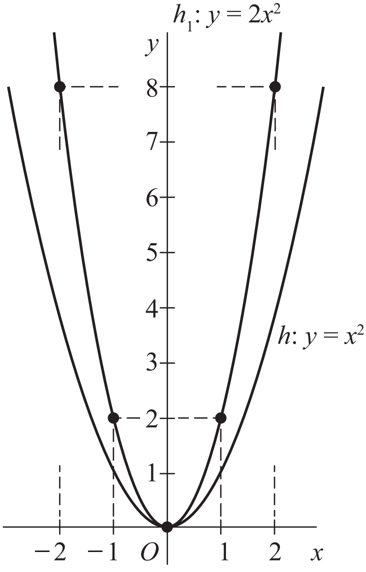
Řešení. Využijeme již známý graf funkce h: $y = x^2$.

a) Pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $h_1(x) = 2 \cdot h(x)$. Je tedy např.

x	0	1	−1	2	−2
$h(x) = x^2$	0	1	1	4	4
$h_1(x) = 2x^2$	0	2	2	8	8



Obr. 2.3



Obr. 2.4

Příklad 26

Řešte kvadratickou nerovnici

$$-2x^2 + 13x - 15 > 0 \tag{5}$$

o neznámé $x \in \mathsf{R}$.

Řešení. Nejprve rozložíme, *pokud to lze*, kvadratický trojčlen $-2x^2 + 13x - 15$ na součin lineárních činitelů. K tomu najdeme kořeny kvadratické rovnice

$$-2x^2 + 13x - 15 = 0 \tag{6}$$

v množině R všech reálných čísel:

$$a = -2,\ b = 13,\ c = -15$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 - 4 \cdot (-2)(-15) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-13 \pm 7}{-4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 5$$

Zkouška (dosazením do (6)):

$$\left.\begin{aligned} l\left(\frac{3}{2}\right) &= -2 \cdot \frac{9}{4} + 13 \cdot \frac{3}{2} - 15 = \frac{-18 + 78 - 60}{4} = 0 \\ p\left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \ l\left(\frac{3}{2}\right) = p\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} l(5) &= -2 \cdot 5^2 + 13 \cdot 5 - 15 = 0 \\ p(5) &= 0 \end{aligned}\right\} \ l(5) = p(5)$$

Podle věty 3 z předchozího článku je

$$-2x^2 + 13x - 15 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5).$$

Místo nerovnice (5) budeme moci nyní řešit nerovnici

$$-2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5) > 0,$$

která má stejnou množinu řešení jako nerovnice (5).

Nerovnice tohoto typu už umíme řešit (viz kapitola 1, čl. 1.10, příklad 24 a cvičení 2):

$$-2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5) > 0 \qquad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 5) < 0 \tag{7}$$

Pro počítání s mocninami s racionálním mocnitelem platí analogické věty jako pro počítání s mocninami s celočíselným mocnitelem:

> Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna racionální čísla r, s platí:
>
> 1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
> 2. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
> 3. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
> 4. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Příklad 10

Použijte větu o násobení mocnin při úpravě výrazů:

a) $4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{5}{4}}$ b) $\sqrt{a} \cdot a^{-\frac{5}{2}}$, $a > 0$ c) $a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$, $a > 0$

Řešení

a) $4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{5}{4}} = 4^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = 4^{\frac{8}{4}} = 4^2 = 16$

b) $\sqrt{a} \cdot a^{-\frac{5}{2}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = a^{-2}$

c) $a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{2+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{30+9+5}{15}} = a^{\frac{44}{15}}$

Příklad 11

Použijte větu o mocnině součinu při úpravě výrazů:

a) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$ b) $a^{\frac{7}{8}} \cdot b^{-\frac{7}{8}}$, $a > 0$, $b > 0$ c) $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$, $x > 0$

Řešení

a) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$ b) $a^{\frac{7}{8}} \cdot b^{-\frac{7}{8}} = (ab^{-1})^{\frac{7}{8}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{7}{8}}$

c) $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = (x^{-1} \cdot x) = 1^{\frac{1}{3}} = 1$

Příklad 12

Použijte větu o umocňování mocniny při úpravě výrazů:

a) $\left(7^{\frac{2}{49}}\right)^{\frac{35}{10}}$ b) $\left(10^3 \cdot 10^{-5}\right)^{-2}$

c) $\left(u^{\frac{25}{12}}\right)^{\frac{6}{5}}$, $u > 0$ d) $\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{5}}$, $a > 0$