OBSAH

1. Souřadnice 8
1.1 Souřadnice v rovině 9
1.2 Souřadnice v prostoru 12
1.3 Vzdálenost bodů 14
1.4 Střed úsečky 17

2. Vektory 22
2.1 Orientované úsečky 22
2.2 Co je vektor 22
2.3 Sčítání vektorů 30
2.4 Násobení vektoru číslem 34
2.5 Skalární součin vektorů 39
2.6 Posunutí soustavy souřadnic 50
2.7 Otočení kartézské soustavy souřadnic 53
2.8 Pravotočivá a levotočivá báze 55
2.9 Vektorový součin a smíšený součin 57

3. Geometrie v rovině 66
3.1 Parametrické vyjádření přímky 66
3.2 Vzájemná poloha přímek daných parametrickými rovnicemi 71
3.3 Obecná rovnice přímky 75
3.4 Polohové úlohy v rovině 82
3.5 Metrické úlohy v rovině 88
3.6 Směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky 98

4. Geometrie v prostoru 106
4.1 Parametrické vyjádření přímky 106
4.2 Parametrické vyjádření roviny 108

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

4.3 Obecná rovnice roviny 111
4.4 Polohové úlohy v prostoru 116
4.5 Metrické úlohy 127

5. Kuželosečky a kulová plocha 138
5.1 Kružnice 138
5.2 Kružnice a přímka 145
5.3 Elipsa 155
5.4 Elipsa a přímka 165
5.5 Parabola 170
5.6 Hyperbola 181
5.7 Hyperbola a přímka 192
5.8 Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic 198
5.9 Kulová plocha 205
5.10 Přehled o kuželosečkách 209

Výsledky úloh 213

Seznam některých užitých symbolů 218

Rejstřík 219

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Obtížnější úlohy jsou v učebnici vyznačeny hvězdičkou.

strojíme jejich průsečíky se souřadnicovými rovinami. V rovině xy tak dostaneme bod A_1 jako průsečík této roviny s rovnoběžkou s osou z. Podobně v rovině xz dostaneme bod A_2 a v rovině yz bod A_3. Rovnoběžka s osou y procházející bodem A_1 protne osu x v bodě A_x, rovnoběžka s osou x procházející bodem A_1 protne osu y v bodě A_y. Podobně pomocí bodu A_2 můžeme sestrojit body A_x a A_z a pomocí bodu A_3 body A_y a A_z.

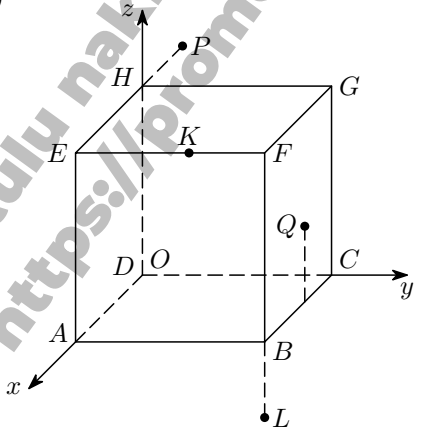
Bodům A_x, A_y, A_z na souřadnicových osách odpovídají na těchto osách čísla a_1, a_2, a_3. Tato čísla se nazývají **souřadnice bodu** A. Podobně jako v rovině, má-li bod A souřadnice a_1, a_2, a_3 zapisujeme $A[a_1; a_2; a_3]$.

Od této chvíle budeme předpokládat, že pokud pracujeme v rovině, je v ní zvolena nějaká kartézská soustava souřadnic Oxy, a pokud pracujeme v prostoru, je v něm zvolena nějaká kartézská soustava souřadnic $Oxyz$.

Příklad 1

Ve volném rovnoběžném promítání je zobrazena krychle $ABCDEFGH$ (obr. 1.7) o délce hrany 5. Zobrazte body $P[-3; 0; 5]$, $Q[2; 5; 2]$.

Řešení (obr. 1.7)



Obr. 1.7

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ je $c_1 - a_1 = u_1 + v_1$. Podobnou úpravu lze provést i pro zbývající souřadnice.

Součet jsme zavedli geometricky — pomocí zvoleného umístění vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$. Právě dokázané tvrzení ukazuje, že při sčítání vektorů nezávisí na volbě umístění vektoru $\boldsymbol{u}$. Pomocí souřadnic snadno ověříme:

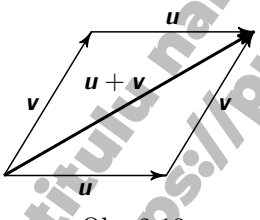
Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (v rovině nebo v prostoru) platí

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

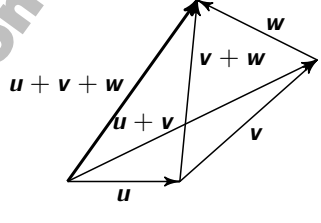
a pro každé tři vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ platí

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$

Sčítání vektorů je komutativní a asociativní. O těchto vlastnostech se můžeme snadno přesvědčit přímo. Komutativnost je zřejmá z obr. 2.13 a asociativnost je zřejmá z obr. 2.14. Protože sčítání vektorů je asociativní, můžeme psát $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. Je totiž jedno, v jakém pořadí provádíme jednotlivé operace.



Obr. 2.13



Obr. 2.14

Vektor určený nulovou orientovanou úsečkou se nazývá **nulový vektor** a označuje se $\boldsymbol{o}$. Je-li $\boldsymbol{u} = B - A$, nazývá se vektor $A - B$ **opačný vektor** k vektoru $\boldsymbol{u}$ a označuje se $-\boldsymbol{u}$.

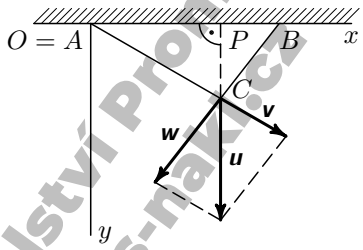
Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Mnemotechnická pomůcka: K vektoru $\boldsymbol{u}$ v rovině najdeme kolmý vektor, zaměníme-li souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ a u jedné z nich změníme znaménko.

Vektorů se často používá pro popis fyzikálních veličin. Proto mají velké použití i v praxi. Ukážeme si to jen na jednom, poměrně jednoduchém příkladu.

Příklad 5

Ve stropě tovární haly jsou zabudovány dva háky, jejichž vzdálenost je 10,5 m. Na jeden z nich zavěsíme lano dlouhé 8,5 m, na druhý z nich zavěsíme lano dlouhé 5 m. Volné konce lan spojíme a zavěsíme na ně kladkostroj (situace je schematicky znázorněna na obr. 2.25). Obě lana mají nosnost 10 tun. Jak těžký předmět můžeme maximálně zavěsit na kladkostroj, nechceme-li překročit nosnost lan?



Obr. 2.25

Řešení

Na obr. 2.25 jsou body A, B místa uchycení lan, bod C je místo zavěšení kladkostroje. Těleso zavěšené v bodě C působí silou, která je znázorněna vektorem $\boldsymbol{u}$. Vektor $\boldsymbol{u}$ rozložíme na součet dvou vektorů — vektoru $\boldsymbol{v}$, který je násobkem vektoru $C - A$, a vektoru $\boldsymbol{w}$, který je násobkem vektoru $C - B$. Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ představují síly, kterými jsou napínána jednotlivá lana.

Nyní zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy (viz obrázek), určíme souřadnice bodů A, B, C a potom najdeme vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

Dostaneme $A[0;0]$, $B[10{,}5;0]$. Z kosinové věty určíme úhel $\alpha = |\sphericalangle CAB|$,

$$\cos\alpha = \frac{10{,}5^2 + 8{,}5^2 - 5^2}{2 \cdot 10{,}5 \cdot 8{,}5} = \frac{110{,}25 + 72{,}25 - 25}{21 \cdot 8{,}5} = \frac{157{,}5}{21 \cdot 8{,}5}.$$

První souřadnice bodu C je číslo

$$c_1 = |AP| = |AC| \cos\alpha = \frac{157{,}5}{21} = 7{,}5.$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Příklad 1

Najděte podmínku, kterou musí splňovat souřadnice bodu $X[x; y]$, aby tento bod ležel na přímce p, která obsahuje bod $P[3; -1]$ a má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (1; 2)$.

Řešení

Bod X leží na přímce p právě tehdy, když vektory $\boldsymbol{n}$ a $X - P$ jsou navzájem kolmé (viz obr. 3.7), tj. je-li jejich skalární součin roven nule. Hledaná podmínka tedy je

$$(1; 2) \cdot (x - 3; y + 1) = 0,$$

tj.

$$x - 3 + 2y + 2 = 0,$$
$$x + 2y - 1 = 0.$$

Postup, který jsme právě použili v příkladu 1, provedeme obecně. Označíme $\boldsymbol{n} = (a; b)$, $P[p_1; p_2]$. Potom bod X leží na přímce p, která obsahuje bod P a má normálový vektor $\boldsymbol{n}$ právě tehdy, když

$$\boldsymbol{n} \cdot (X - P) = 0,$$

tj.

$$(a; b) \cdot (x - p_1; y - p_2) = 0,$$
$$ax - ap_1 + by - bp_2 = 0.$$

Označíme-li $c = -ap_1 - bp_2$, dostáváme výsledný vztah ve tvaru

$$ax + by + c = 0.$$

Jestliže obráceně jsou dána tři čísla a, b, c tak, že aspoň jedno z čísel a, b je nenulové, snadno najdeme dvojici čísel p_1, p_2 tak, že

$$ap_1 + bp_2 + c = 0$$

(je-li např. $a \neq 0$, zvolíme libovolně číslo p_2 a vypočítáme p_1). Jestliže nyní za c dosadíme $-ap_1 - bp_2$, snadno upravíme rovnici

$$ax + by - ap_1 - bp_2 = 0$$

na tvar

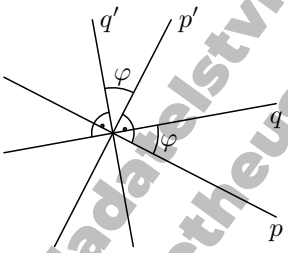
$$\boldsymbol{n} \cdot (X - P) = 0.$$

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Odchylka přímek p, q se směrovými vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je číslo $\varphi \in \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}.$$

Jsou-li dány dvě přímky p, q (obr. 3.14), můžeme k nim sestrojit kolmé přímky p', q'. Potom odchylka přímek p, q je stejná jako odchylka přímek p', q'. Avšak směrové vektory přímek p', q' jsou normálové vektory přímek p, q.



Obr. 3.14

Příklad 6

Vypočítejte odchylku přímek p, q:

$$p\colon x = 1 + t \qquad\qquad q\colon 2x + y - 1 = 0$$
$$y = 2 + 3t,\ t \in \mathsf{R}$$

Řešení

Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u} = (1; 3)$. Normálový vektor přímky q je $\boldsymbol{n} = (2; 1)$. Směrový vektor přímky q je $\boldsymbol{v} = (1; -2)$. Vypočítáme

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

? Jakou vzájemnou polohu mohou mít v prostoru dvě přímky?

Při řešení těchto úloh budeme přímky zadávat bodem a vektorem nebo, což je vlastně totéž, parametrickými rovnicemi. Rovinu je nejvýhodnější zadat obecnou rovnicí. Proto se při řešení úloh omezíme na tento případ. Známe-li parametrické vyjádření roviny, můžeme snadno najít její obecnou rovnici.

Tak jako u úloh v rovině u každé úlohy napíšeme postup řešení a potom ukážeme řešení na konkrétním zadání.

Příklad 1

Daným bodem $Q[1; 2; -3]$ veďte přímku q rovnoběžnou s danou přímkou p, která je dána parametrickými rovnicemi:

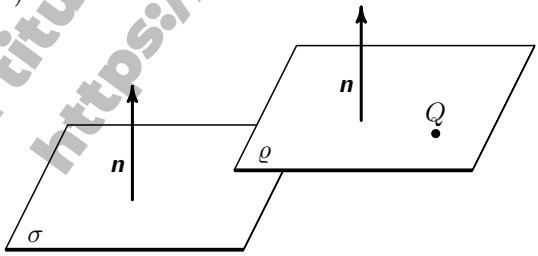
$$\begin{aligned} p\colon x &= 2 + 3t, \\ y &= -1 + 2t, \\ z &= 1 - t, \quad t \in \mathsf{R}. \end{aligned}$$

Řešení

$$\begin{aligned} q\colon x &= 1 + 3t, \\ y &= 2 + 2t, \\ z &= -3 - t, \quad t \in \mathsf{R}. \end{aligned}$$

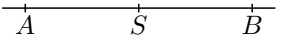
? Než přistoupíme k řešení druhého příkladu, odpovězte na otázky:

1. Jak z obecné rovnice roviny určíme její normálový vektor?
2. Jak spolu souvisejí normálové vektory dvou rovnoběžných rovin (obr. 4.4)?

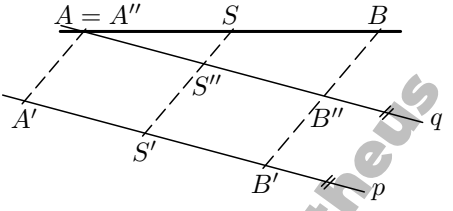


Obr. 4.4

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz



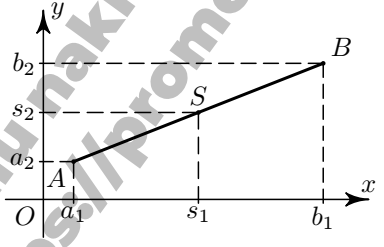
Obr. 1.10



Obr. 1.11

Dosadíme-li za s, snadno zjistíme, že $|AS| = |BS| = \frac{1}{2}|AB|$, tzn. že S je střed úsečky AB.

Jestliže body A, B a středem S úsečky AB vedeme navzájem rovnoběžné přímky, které nesplývají s přímkou AB (obr. 1.11), a tyto přímky protneme libovolnou přímkou p, získáme body A', B', S'. Snadno ověříme, že bod S' je střed úsečky $A'B'$. Např. vedeme-li bodem A přímku q rovnoběžnou s přímkou p, získáme body S'', B'' (obr. 1.11). SS'' je střední příčka v trojúhelníku $AB''B$, proto S'' je střed úsečky AB''. Dále $S''S'$ je střední příčka v rovnoběžníku $A'B'B''A$, a proto S' je střed úsečky $A'B'$.



Obr. 1.12

Souřadnice středu úsečky můžeme tedy určit ze souřadnic jejích krajních bodů. V rovině podle právě dokázaného tvrzení dostáváme (obr. 1.12):

Ukázka titulu nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz

Příklad 4

Veďte bodem $A[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$ tečny ke kružnici dané rovnicí

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0.$$

Řešení

Úlohu už máme vlastně vyřešenou, stačí využít řešení příkladu 3. Jak bychom však postupovali, kdyby učebnice předcházející příklad neobsahovala? Uvažovali bychom např. všechny přímky, které procházejí bodem A. Je to jednak přímka, která má rovnici $x = \frac{1}{2}$ a pak přímky, které mají směrnici. Jejich rovnice se dá napsat ve tvaru

$$y = k\Big(x - \frac{1}{2}\Big) + \frac{9}{2}.$$

Snadno se přesvědčíme, že přímka daná rovnicí $x = \frac{1}{2}$ je sečnou dané kružnice. Dosadíme-li totiž do rovnice kružnice $\frac{1}{2}$ za x, dostaneme pro y kvadratickou rovnici $y^2 - 4y + \frac{1}{4} = 0$ s kořeny $2 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$. Přímka $x = \frac{1}{2}$ protíná kružnici v bodech

$$\Big[\frac{1}{2}; 2 + \frac{1}{2}\sqrt{15}\Big] \quad \text{a} \quad \Big[\frac{1}{2}; 2 - \frac{1}{2}\sqrt{15}\Big].$$

Hledejme společné body přímky, která má rovnici $y = k(x - \frac{1}{2}) + \frac{9}{2}$ s danou kružnicí. Dosazením výrazu $k(x-\frac{1}{2})+\frac{9}{2}$ za y do rovnice kružnice dostaneme po úpravách kvadratickou rovnici pro x:

$$(1 + k^2)x^2 - (k^2 - 5k + 6)x + \frac{1}{4}(k^2 - 10k + 21) = 0,$$

její diskriminant je

$$D = (k^2 - 5k + 6)^2 - (1 + k^2)(k^2 - 10k + 21) = 5(3k^2 - 10k + 3).$$

Je-li $D > 0$, má rovnice dvě různá řešení, dostaneme dva průsečíky, přímka je sečnou. Je-li $D < 0$, nemá rovnice řešení (v oboru reálných čísel) a přímka nemá s kružnicí žádný společný bod. Přímka s rovnicí

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus
https://prometheus-nakl.cz