OBSAH

ÚVOD

Lidé se odedávna zabývají početními úkoly, které je nesnadné, či dokonce nemožné řešit pouhým úsudkem a přímým výpočtem. Dnes dobře víme, že často lze takové úkoly zvládnout postupem, který byl znám již starověkým učencům: Nemůžeme-li hledané výsledky určit přímo, *sestavíme* nejdříve jednu nebo několik *rovnic*, které vystihují zkoumaný úkol a které zahrnují známé i neznámé údaje. Potom tyto rovnice *řešíme*, tj. počítáme z nich hledané výsledky.

Zmíněná metoda se po dlouhá staletí vyvíjela a zdokonalovala. Dnes už si ani nedokážeme představit, že bychom mohli rovnice sestavovat a řešit bez vhodné symboliky pro aritmetické operace a bez označování neznámých údajů písmeny. O vývoji matematických zápisů jste se mohli dočíst v úvodu k předchozímu sešitu *Výrazy 1.* Pokud jste zvládli i další obsah sešitu, naučili jste se základům „algebraického jazyka" a jste připraveni s tímto jazykem začít pracovat, tj. řešit rovnice. Právě tomu je věnován sešit, který držíte v rukou.

Z rozsáhlé nauky o řešení rovnic se prozatím seznámíme pouze se základními obraty, kterým říkáme *ekvivalentní úpravy rovnic.* Pomocí nich se naučíme řešit významnou skupinu rovnic, které dnes nazýváme *lineárními.* Takové rovnice už řešili staří Egypťané a Babyloňané. Uvidíme, že lineární rovnice lze úspěšně využít při řešení mnoha zajímavých praktických úloh, např. úloh o pohybech se stálými rychlostmi.

Místo rovnic vyjadřujeme podmínky některých situací *nerovnicemi.* Bude proto užitečné, budeme-li umět pracovat s nerovnostmi mezi reálnými čísly stejně dobře jako s rovnostmi. Nejprve se naučíme rozlišovat *ostré* a *neostré* nerovnosti a zapisovat číselné množiny zvané *intervaly.* Pak se budeme věnovat řešení lineárních nerovnic pomocí ekvivalentních úprav. Zjistíme, co mají oba postupy pro rovnice a nerovnice společného a v čem se liší.

I když se v tomto sešitě nebudeme zabývat rovnicemi, které nejsou lineární, poznamenejme, že výsledky bádání o takových rovnicích (dosažené v Evropě v 16. až 19. století) nejen rozšířily oblast uplatnění matematiky v přírodních vědách, ale obohatily i samotnou matematiku. Přispěly totiž k zobecnění pojmu čísla a mimo jiné daly odpověď na otázku, které geometrické konstrukce nelze provést pomocí pravítka a kružítka. Byl objeven i pozoruhodný poznatek, že vzorce pro *přesná* řešení mnohých důležitých rovnic, které matematikové dlouho usilovně hledali, vůbec neexistují, takže je zbytečné v tomto hledání dále pokračovat.

Zápisy

$$x - 2 = 7, \qquad 25 = 3x + 7, \qquad x + 5 = 2x - 7$$

jsou příklady **rovnic**. Na jedné nebo na obou stranách každé rovnice se objevuje *výraz s proměnnou*. Proměnná zastupuje neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se **neznámá**; nejčastěji se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.

Řešit rovnici znamená určit *všechna čísla*, která je možné dosadit za neznámou, aby se rovnice „přeměnila“ v platnou rovnost. Každé takové číslo nazýváme **kořenem** nebo **řešením** dané rovnice.

Přesvědčte se, že

řešením rovnice $25 = 3x + 7$ je číslo 6,
řešením rovnice $x + 5 = 2x - 7$ je číslo 12.

Slovo „řešení“ se u rovnic používá ve dvojím významu: jednak znamená *postup*, kterým určujeme neznámou, jednak se jím pojmenovává i „správná hodnota“ neznámé – *kořen* rovnice.

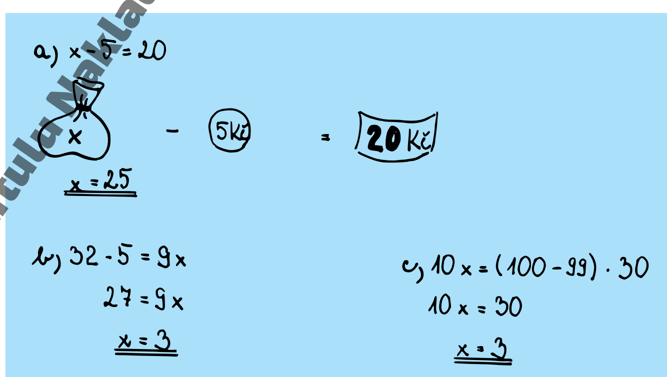
Připomeňme ještě, že i u rovnic hovoříme o *levé* a *pravé* straně rovnice. Označujeme je rovněž písmeny L a P.

☐ **2.** Zjistěte, zda číslo 6 je kořenem následující rovnice:

a) $7x + 3 = 45$ b) $2 = 20 - 3y$ c) $7z - 9 = 35$

Jak postupujeme při řešení rovnic?

Nejjednodušší typy rovnic už umíte řešit. Podívejte se, jak takové rovnice řešila Martina:



Příklad 8. Řešte rovnici:

$$1 - 3 \cdot (x - 3) = 4 \cdot (1 - 2x) + 1$$

Řešení

$$\begin{aligned} 1 - 3 \cdot (x - 3) &= 4 \cdot (1 - 2x) + 1 \\ 1 - 3x + 9 &= 4 - 8x + 1 \\ 10 - 3x &= 5 - 8x \\ -3x + 8x &= 5 - 10 \\ 5x &= -5 \qquad \Big| : 5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Sami se přesvědčte, že pro $x = -1$ jsou obě strany rovnice rovny 13.

7. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $-(x - 1) = 3x + 2$

b) $-y = 4 - 2 \cdot (y - 3)$

c) $2 \cdot (z - 1) = 10 - 3 \cdot (z + 1)$

d) $2 \cdot (t - 1) + 3 \cdot (1 - t) = 4 \cdot (t - 2)$

?

Jak řešíme rovnice se zlomky?

Jestliže rovnice obsahuje zlomky, začínáme její řešení zpravidla tak, že tyto zlomky „odstraníme“. Vynásobíme obě strany rovnice nejmenším společným jmenovatelem všech zlomků. Prohlédněte si tento postup na příkladech:

Příklad 9. Řešte rovnici s neznámou y:

$$\frac{y}{5} = -\frac{2}{3}$$

Řešení. Nejmenším společným jmenovatelem obou zlomků je $5 \cdot 3 = 15$. Proto obě strany rovnice nejprve vynásobíme 15:

$$\begin{aligned} \frac{y}{5} &= -\frac{2}{3} \qquad \Big| \cdot 15 \\ 15 \cdot \frac{y}{5} &= 15 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ 3y &= -10 \qquad \Big| : 3 \\ y &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Tomáš .... x Kč

Pavel .... (x − 61) Kč

Jana .... 0,7x Kč

Dohromady ..... (x + x − 61 + 0,7x) Kč

Tatínek platil .... 344 Kč

$x + x - 61 + 0{,}7x = 344$

$2{,}7x - 61 = 344$

$2{,}7x = 344 + 61$

$2{,}7x = 405 \qquad |:2{,}7$

$x = 150$

Tomáš .... 150 Kč

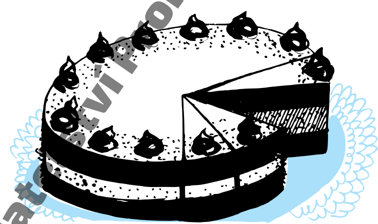
Pavel ..... (150 − 61) Kč = 89 Kč

Jana ..... 0,7 · 150 Kč = 105 Kč

Zk.: celkem ...... 344 Kč

Tomáš dostal knihu za 150 Kč, Pavel za 89 Kč, Jana za 105 Kč.

Příklad 5. Dědeček i jeho vnuk Toník slaví narozeniny v říjnu. Dědeček letos při oslavě řekl: „Vidíš, Toníku, jsem teď šestkrát starší než ty. Ale za 8 let, pokud se toho dožiju, to bude jen čtyřikrát.“ Kolikáté narozeniny slavil dědeček letos?



Řešení. Za neznámou y zvolíme nynější počet dědečkových let. Protože je letos šestkrát starší než Toník, je Toníkovi nyní $\dfrac{y}{6}$ let. Za 8 let by dědečkovi bylo $(y + 8)$ let, zatímco Toníkovi $\left(\dfrac{y}{6} + 8\right)$ let. To by byl dědečkův věk čtyřikrát větší než Toníkův. Proto musí platit:

$$y + 8 = 4 \cdot \left(\frac{y}{6} + 8\right)$$

$$94\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{94\,000\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = \frac{940\,\mathrm{m}}{36\,\mathrm{s}} = \frac{235\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{s}} \doteq 26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Rychlost letu poštovního holuba je tedy asi $26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Protože $67 : 26 \doteq 2{,}58$, létá vlaštovka asi dvaapůlkrát rychleji než poštovní holub.

Příklad 2. Závodník uběhl úsek dlouhý 1 km za 4 minuty. Jaká byla jeho průměrná rychlost v kilometrech za hodinu? Vyjádřete ji také v metrech za sekundu.

Řešení. Nejprve vyjádříme rychlost závodníka v kilometrech za hodinu. Použijeme při tom vzorec $v = \frac{s}{t}$:

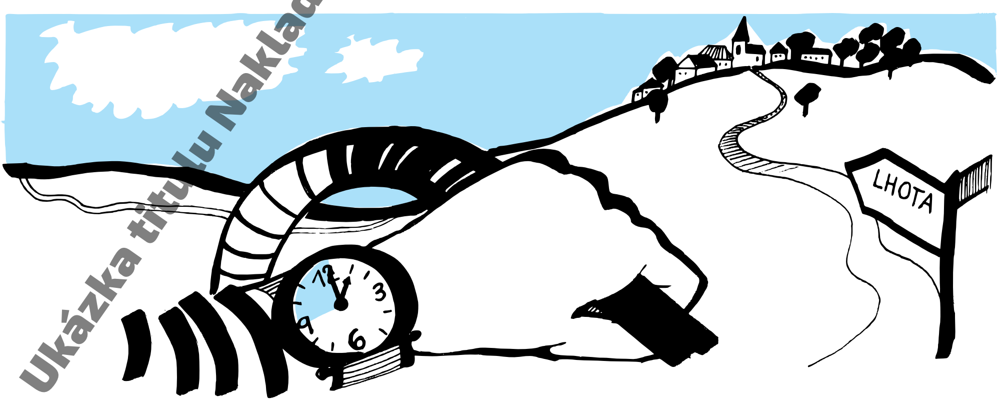
$$v = \frac{s}{t} = \frac{1\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{min}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{4 \cdot \frac{1}{60}\,\mathrm{h}} = \left(1 : \frac{4}{60}\right)\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{60}{4}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Nyní rychlost vyjádříme v $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{min}} = \frac{1\,000\,\mathrm{m}}{4 \cdot 60\,\mathrm{s}} = \frac{1\,000}{240}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{25}{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \doteq 4{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Závodník běžel rychlostí $15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, což je asi $4{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

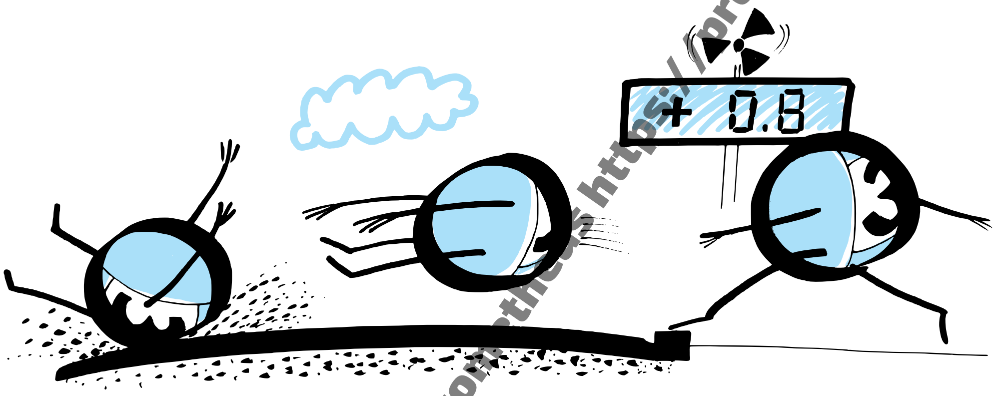
Příklad 3. Cyklista projel trať průměrnou rychlostí $40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ za 15 minut. Určete délku trati.



7 INTERVALY

V praktickém životě se často setkáváme s tím, že určité údaje leží v jistém rozmezí. Například:

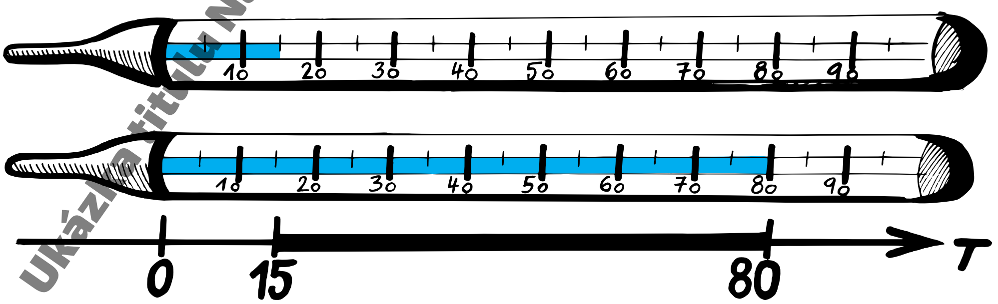
- Obchod je otevřen od 8 do 12 hodin a od 14 do 18 hodin.
- Žák, který získá při maturitní písemné práci z matematiky více než 33 bodů a méně než 42 bodů z 50 možných, bude na maturitním vysvědčení hodnocen chvalitebně.
- Občan České republiky má volební právo, je-li starší 18 let.
- Světový rekord ve skoku dalekém je platný, pokud vítr v zádech skokana nepřekročí rychlost 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (Protivítr může být libovolný.)



Skutečnost, že hodnoty některé veličiny leží v určitém rozmezí, vyjadřujeme v matematice pomocí množin čísel zvaných *intervaly*. Seznámíme se s několika druhy intervalů a naučíme se je symbolicky zapisovat.

? Co je *uzavřený interval*?

Petrova maminka zavařovala ovoce. Voda v hrnci, která měla původně teplotu 15 °C, se postupně zahřála na 80 °C. Znázorněme na číselné ose všechny hodnoty, kterých teplota vody při ohřívání dosáhla:



Obě strany nerovnice zjednodušíme:

$$x \leqq 24$$

Množinu všech řešení znázorníme na číselné ose

a odpověď zapíšeme pomocí intervalu: $x \in (-\infty, 24\rangle$

Příklad 2. Řešte nerovnici $x + 4 \geqq 20$.

Řešení. Tentokrát je vhodné *odečíst* od obou stran nerovnice číslo 4:

$$x + 4 - 4 \geqq 20 - 4$$
$$x \geqq 16$$

Řešením nerovnice je každé číslo x z intervalu $\langle 16, \infty)$ a žádné jiné.

4. Řešte nerovnice:

a) $x - 3 > 8$
b) $x + 5 \leqq -2$
c) $3 > x - 8$
d) $4 \geqq x + 5$

Abychom mohli řešit složitější nerovnice, vysvětlíme nyní, zda se množina řešení nerovnice změní, jestliže obě její strany *vynásobíme* nebo *vydělíme* stejným nenulovým číslem.

Jak *násobíme* strany nerovnice?

Nejprve zjistíme, co se stane s nerovností, když obě její strany vynásobíme stejným *kladným* číslem. Vezměme např. platnou nerovnost $3 > 2$ a zkoumejme platnost nerovnosti $3 \cdot c > 2 \cdot c$ pro několik *kladných* hodnot proměnné c:

c	$3c$	$2c$	$3c > 2c$	Platí?
1	3	2	$3 > 2$	ano
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2} > 1$	ano
2	6	4	$6 > 4$	ano
5	15	10	$15 > 10$	ano