OBSAH

ÚVOD

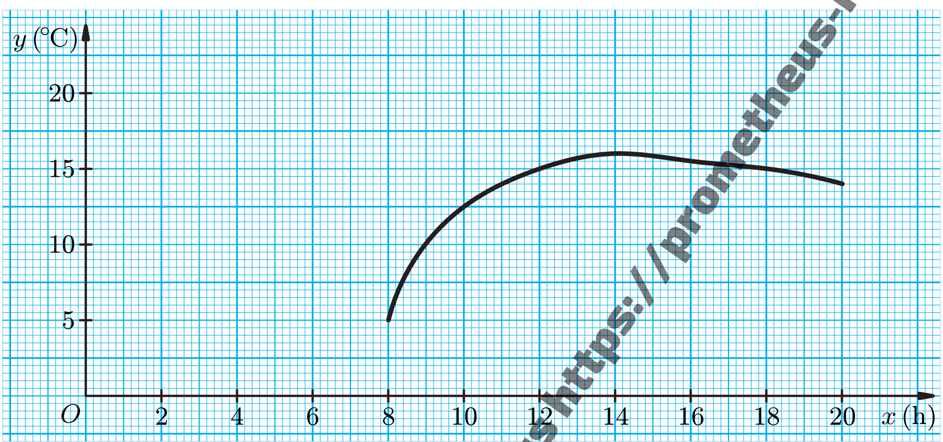
Možná jste se v prvních letech školní docházky někdy zamysleli nad otázkou, co vás čeká v hodinách matematiky o několik ročníků výše. Budou to jen náročnější výpočty s velkými čísly a rýsování složitějších útvarů v rovině? Nyní se zase můžete ptát, jaké matematické problémy řeší maturanti nebo studenti vysokých škol. A o čem vlastně bádají lidé, pro které se matematika stala životní profesí? Jaké hranice oddělují matematiku od ostatních vědních oborů?

Odpovědi na poslední otázky nejsou jednoduché. V hodinách matematiky se naše představy o tomto předmětu rozšiřují postupně, vždy když se seznámíme s některým novým základním pojmem nebo přístupem. První z důležitých "proměn" matematiky jsme již poznali, když jsme od výpočtů s konkrétními čísly přešli k *symbolickým výpočtům* s písmeny. (Písmena v roli *neznámých čísel* nám pak umožnila řešit řadu úloh metodou rovnic.)

V tomto sešitě se začneme věnovat druhému, ještě důležitějšímu průlomu hranic, které až do 16. století vymezovaly svět matematiky. Je jím přechod ke studiu *proměnných veličin*, přesněji *závislostí* mezi nimi. Nebudeme nyní tuto změnu ve vývoji matematiky podrobně popisovat, přirovnejme ji pouze k proměně fotografického přístroje, který zachycuje *jednotlivé okamžiky* světa v hledáčku, ve filmovou kameru, jež zaznamenává *průběh* změn v čase (pohyb). Toto přirovnání je přiléhavé i tím, že jedním z prvních úspěchů „nové“ matematiky byla metoda anglického fyzika *Isaaca Newtona* (1642 – 1727), kterou lze stanovit okamžitou rychlost pohybujícího se bodu ze vzorců pro závislosti jeho souřadnic na čase (dnes říkáme, že takové souřadnice jsou *funkce* času). Newton tak vyřešil jeden z důležitých úkolů, které před matematiku 17.–18. století postavil bouřlivý rozvoj přírodních věd, zejména mechaniky a astronomie. Mnohé z nich vedly k následujícím otázkám: jak početně určit tečnu k dané křivce v daném bodě, jak vypočítat obsah rovinného útvaru ohraničeného danými křivkami, jak vypočítat objem tělesa ohraničeného danými plochami (předpokládá se, že zmíněné křivky a plochy jsou dány rovnicemi popisujícími závislost souřadnic bodů, které tyto křivky a plochy vytvářejí). K největším průkopníkům „matematiky závislých veličin“ kromě I. Newtona patřili *G. W. Leibniz*, *bratři Bernoulliové*, *J. L. Lagrange* a *L. Euler*.

Jaké jsou jiné způsoby zadání funkce?

V životě se běžně setkáváme se závislostmi veličin, které neumíme vyjádřit vzorcem. Na obrázku je zachyceno, jak se jednoho dne od 8 do 20 hodin v Brně měnila teplota vzduchu:



Za nezávisle proměnnou zde považujeme čas v hodinách vyjádřený číslem x z intervalu $\langle 8, 20\rangle$. Závisle proměnnou je teplota ve stupních Celsia vyjádřená číslem y ležícím v intervalu $\langle 5, 16\rangle$, jak jsme vyčetli z grafu.

Skutečnost, že proměnná y je funkcí proměnné x, v této situaci znamená, že každému číslu $x \in \langle 8, 20\rangle$ je přiřazena jediná hodnota $y \in \langle 5, 16\rangle$. (S jistou dávkou přesnosti ji můžeme vyčíst z grafu.) Proto i v tomto případě píšeme

$$y = f(x),$$

i když tuto funkci f neumíme zapsat vzorcem, tj. neznáme pravidlo, jak z čísla x vypočítat funkční hodnotu $f(x)$.

Teplotu ovzduší ovlivňuje řada faktorů. Denní doba, která je určena polohou daného místa na zeměkouli vůči Slunci, je pouze jedním z nich.

Mezi časem a teplotou ovzduší proto neexistuje zákonitost, kterou by bylo možno vyjádřit matematickým vzorcem. Přesto jde o závislost ve významu matematické funkce: z hlediska fyziky totiž nelze připustit, že by v některém časovém okamžiku na zkoumaném místě teplota vzduchu vůbec neexistovala nebo měla více než jednu hodnotu.

Předchozí obrázek byl pořízen na základě údajů získaných pomocí přístroje zvaného *termograf*, který měří a zapisuje teplotu „spojitě“, tj. v každém okamžiku. Kdybychom měřili teplotu jen každou celou sudou hodinu, dostali bychom „chudší“ obrázek:

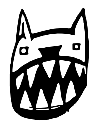
Také u grafického znázornění závislosti teploty na čase nebylo možné, aby v jednom časovém okamžiku byly v daném místě naměřeny dvě odlišné teploty.

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vlastností, kterou matematici vložili do pojmu funkce:

Každé hodnotě nezávisle proměnné (z definičního oboru) je funkcí přiřazena ***jediná*** *hodnota závisle proměnné (zvaná funkční hodnota).*

Proto například tabulka

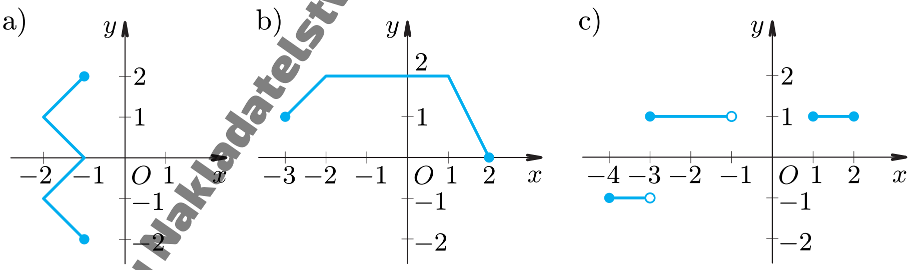
x	-1	2	0	4	2
y	0	3	0	1	-1



neodpovídá žádné funkci $y = f(x)$. Hodnotě $x = 2$ jsou totiž přiřazeny dvě různé hodnoty y: $y = 3$ a $y = -1$.

I když nebudeme uvádět příklady, poznamenejme, že grafy některých funkcí jsou natolik „složité“ množiny, že je vůbec nedokážeme znázornit. Grafem funkce je totiž libovolná neprázdná množina G bodů roviny, která má s každou přímkou rovnoběžnou s osou y společný *nejvýše jeden* bod.

7. Rozhodněte, zda na obrázku je graf některé funkce:



☐**8.** Rozhodněte, zda daná tabulka zadává funkci:

a)

x	4	5	6	7
y	8	8	8	8

b)

x	2	-2	$\sqrt{4}$	$-\frac{4}{2}$	0
y	1	-1	3	-2	5

Neposuzovali jsme ještě závislost $y = kx$ v případě $k = 0$. Funkce daná vzorcem $y = 0 \cdot x$ přiřazuje každému reálnému číslu x stejnou funkční hodnotu, a to číslo 0. Taková funkce je příkladem tzv. *konstantní funkce*; dohodneme se, že ji nebudeme považovat za přímou úměrnost. Ke konstantním funkcím se podrobněji vrátíme v příští kapitole.

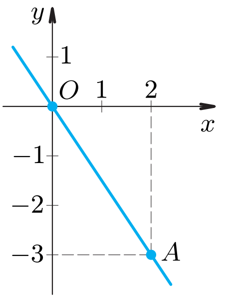
Přímou úměrností nazýváme funkci $f\colon\ y = kx,\ \ x \in \mathsf{R}$, kde k je nenulové reálné číslo zvané **koeficient** přímé úměrnosti f.
Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.

?

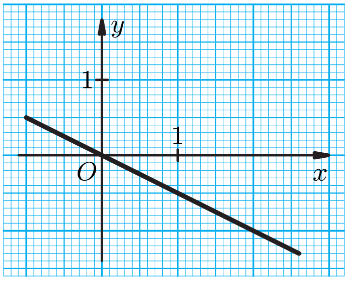
Jak sestrojíme graf přímé úměrnosti?

Protože grafem každé přímé úměrnosti je přímka, která vždy prochází bodem $O[0, 0]$, stačí k jejímu sestrojení najít ještě jeden jiný bod této přímky.

Například funkce $f\colon\ y = -\frac{3}{2}x$ má v bodě $x = 2$ hodnotu $f(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$. Proto je jejím grafem přímka procházející body $O[0, 0]$ a $A[2, -3]$. Je narýsována na obrázku vpravo.



Řešme nyní „opačnou“ otázku – jak z grafu přímé úměrnosti určit její vzorec (za předpokladu, že kromě bodu $[0, 0]$ je na grafu ještě další bod, jehož souřadnice jsou dány nebo je dokážeme z grafu na milimetrovém papíře vyčíst). Provedeme to pro přímku z obrázku:



7. Narýsujte graf funkce dané vzorcem:

a) $y = -3$ b) $y = \frac{1}{5}$ c) $y = 0 \cdot x + 100$

8. Které přímky v rovině s danou soustavou souřadnic nejsou grafem žádné lineární funkce?

Kdy je lineární funkce rostoucí a kdy klesající?

Připomeňme, co jsme již dříve zjistili o přímé úměrnosti:

- přímá úměrnost $y = kx$ je rostoucí, pokud $k > 0$
- přímá úměrnost $y = kx$ je klesající, pokud $k < 0$

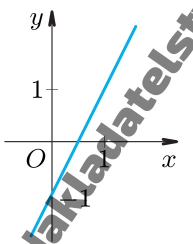
Těchto výsledků můžeme využít i při zkoumání toho, kdy je rostoucí a kdy klesající funkce $f\colon\ y = kx + q$, kde $k \neq 0$. Víme již, že pro tuto funkci a jí odpovídající přímou úměrnost $g\colon\ y = kx$ platí:

$$f(x_1) = g(x_1) + q \quad \text{a} \quad f(x_2) = g(x_2) + q \quad \text{pro libovolná} \quad x_1, x_2 \in \mathsf{R}$$

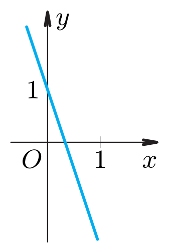
Proto porovnání hodnot $f(x_1)$ a $f(x_2)$ dopadne stejně jako porovnání odpovídajících hodnot $g(x_1)$ a $g(x_2)$. (Nerovnost mezi dvěma čísly se zachová, když k oběma číslům přičteme stejné číslo q.)

Proto je lineární funkce $y = kx + q$ rostoucí právě tehdy, když je rostoucí přímá úměrnost $y = kx$, tedy když $k > 0$. Lineární funkce $y = kx + q$ je klesající právě tehdy, když je klesající přímá úměrnost $y = kx$, tzn. pokud $k < 0$.

Prohlédněte si grafy jedné rostoucí a jedné klesající lineární funkce:



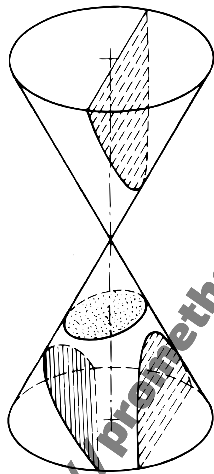
$f_1\colon\ y = 2x - 1$



$f_2\colon\ y = -3x + 1$

Je-li koeficient k lineární funkce $y = kx + q$ kladný, je tato funkce rostoucí, je-li koeficient k záporný, je tato funkce klesající.

Parabolu řadíme mezi křivky zvané *kuželosečky*. Jsou to křivky, které vzniknou, když plášť kužele „rozřízneme“ rovinou. Mezi kuželosečky patří také *kružnice*, *elipsa* a *hyperbola*.



Obrázek paraboly napovídá, že funkce $f\colon\ y = x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Můžeme to ověřit i nezávisle na obrázku následujícím výpočtem:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)$$

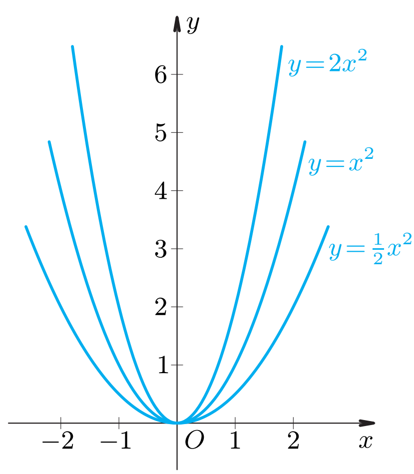
Je-li $x_1 < x_2 \leqq 0$, je každý z činitelů $x_1 - x_2$ a $x_1 + x_2$ záporný, jejich součin je tedy kladný. Proto je kladný rozdíl $f(x_1) - f(x_2)$, a tedy $f(x_1) > f(x_2)$. To znamená, že funkce f je v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ skutečně klesající.

Je-li $0 \leqq x_1 < x_2$, je činitel $x_1 - x_2$ záporný a činitel $x_1 + x_2$ kladný, takže jejich součin je záporný. Proto je záporný i rozdíl $f(x_1) - f(x_2)$, a tedy $f(x_1) < f(x_2)$. To znamená, že funkce f je v intervalu $\langle 0, \infty)$ opravdu rostoucí.

Co je *kvadratická funkce*?

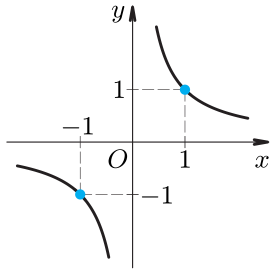
?

Parabolu jsme zatím poznali jen jako graf funkce $f\colon\ y = x^2$. Všechny křivky, kterým říkáme paraboly, však nejsou shodné. Navzájem se liší tím, jak se „rychle rozevírají“. Jsou to grafy funkcí $y = kx^2$ pro různá kladná čísla k, nejenom pro $k = 1$ jako dosud. Pro srovnání zakreslíme do jednoho obrázku grafy funkcí $y = kx^2$ pro $k = \frac{1}{2}$, $k = 1$ a $k = 2$.

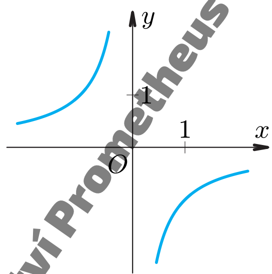


Funkce f však není klesající (v celém definičním oboru). Potvrzuje to například dvojice bodů, které jsou vyznačeny na grafu funkce f:

$$\text{ačkoliv} \quad -1 < 1, \quad \text{platí} \quad f(-1) < f(1).$$



Je-li $k < 0$, je z obrázku hyperboly patrné, že funkce $f\colon\ y = \dfrac{k}{x}$ je *rostoucí* jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$. Sami vysvětlete, proč o funkci f nemůžeme říci, že je rostoucí (v celém definičním oboru).



Je-li koeficient k nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{k}{x}$ kladný, je tato funkce klesající jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.
Je-li koeficient k nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{k}{x}$ záporný, je tato funkce rostoucí jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

□ **4.** Najděte intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí a ve kterých je klesající, je-li:

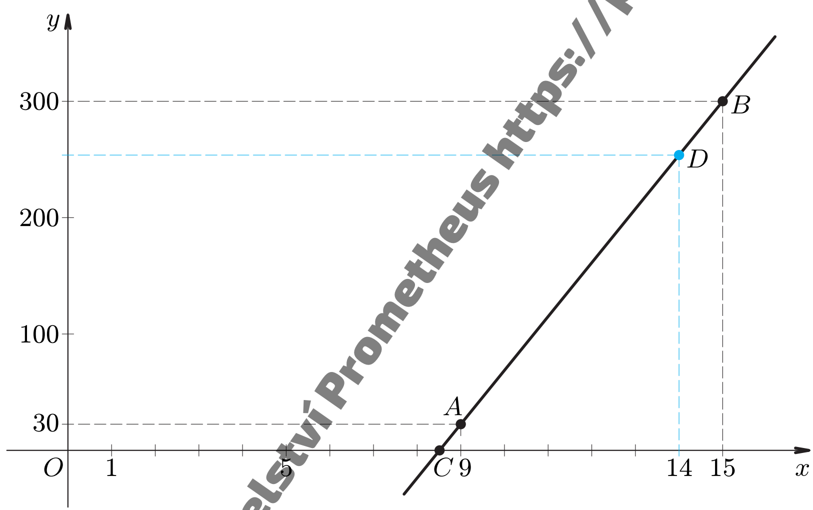
a) $f\colon\ y = \dfrac{4}{x}$ b) $f\colon\ y = -\dfrac{2}{x}$ c) $f\colon\ y = \dfrac{2}{5x}$ d) $f\colon\ y = \dfrac{-3}{8x}$

Při napouštění bazénu narůstalo množství vody od 0 hl (prázdný bazén) do 300 hl (plný bazén). Proto jsme z celé přímky AB modře vyznačili pouze její část – úsečku CB. Ta je tvořena právě těmi body, jejichž souřadnice y splňují nerovnosti

$$0 \leqq y \leqq 300.$$

Bod C odpovídá okamžiku, kdy se bazén začínal napouštět. Z grafu vyčteme jeho x-ovou souřadnici $x_C \doteq 8{,}3$. To znamená, že se bazén začal napouštět asi v 8 h 18 min.

Tak jsme našli odpověď na otázku a) naší úlohy. Pomohli jsme si grafem, který můžeme využít i při řešení části b). Stavu bazénu ve 14 hodin totiž odpovídá takový bod D grafu, jehož x-ová souřadnice je 14.



Z grafu určíme $y_D \doteq 260$. Proto ve 14 hodin bylo v bazénu asi 260 hl vody.

Přesnost „grafických" výsledků nyní ověříme úsudkem.
Protože $300 - 30 = 270$ a $15 - 9 = 6$, přiteklo do bazénu 270 hl vody za 6 hodin, tedy za 1 hodinu to bylo $\frac{270}{6}$ hl, tj. 45 hl vody. Proto napuštění prvních 30 hl trvalo $\frac{30}{45}$ hodiny, tedy 40 minut; napouštění tedy začalo v 8 hodin 20 minut. Za dobu od 9 hodin do 14 hodin do bazénu nateklo $5 \cdot 45\,\text{hl} = 225\,\text{hl}$ vody, takže ve 14 hodin bylo v bazénu $(30 + 225)\,\text{hl} = 255\,\text{hl}$ vody.

Najdeme ještě vzorec příslušné lineární funkce

$$y = ax + b,$$

která vyjadřuje závislost zkoumaných veličin x a y. Podle bodů $A[9, 30]$,