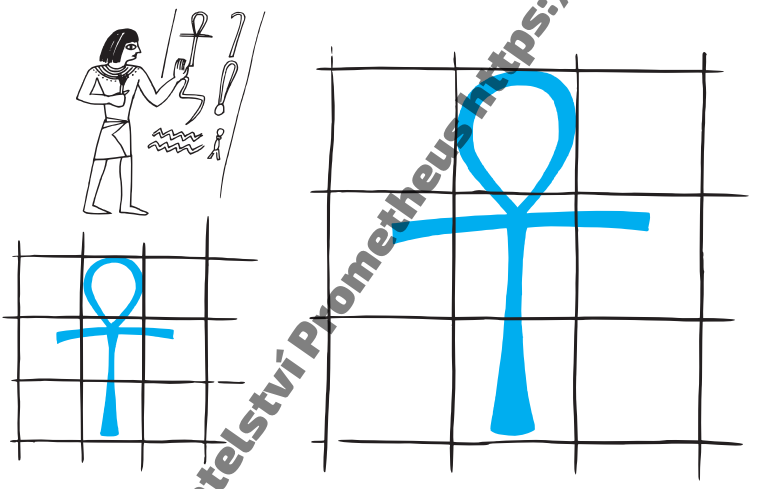
OBSAH

Na vysvětlenou ... 6
Úvod ... 8
1 Podobnost útvarů ... 11
Cvičení 1 ... 24
2 Podobné trojúhelníky ... 26
Cvičení 2 ... 43
3 Užití podobnosti ... 46
Cvičení 3 ... 65
4 Sinus ostrého úhlu ... 67
5 Kosinus ostrého úhlu ... 80
Cvičení 4 ... 88
6 Tangens a kotangens ostrého úhlu ... 90
Cvičení 5 ... 101
7 Vztahy mezi funkcemi úhlů ... 103
Cvičení 6 ... 113
8 Řešení úloh o trojúhelníku ... 115
Cvičení 7 ... 122
9 Úlohy z matematické olympiády ... 124
Cvičení 8 ... 127
10 Souhrnná cvičení ... 129
Výsledky průběžných úkolů ... 145
Výsledky cvičení ... 147
Výsledky souhrnných cvičení ... 151

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

ÚVOD

Obdivujeme-li krásu některého ornamentu, těšíme se z tvarů křivek a obrazců, které ho vytvářejí, lahodí nám jejich symetrie či „harmonie“ poměrů různých délek nebo vzdáleností. Zmíněné vlastnosti se zachovají, i když ornament nakreslíme v jiné velikosti. Toho využívali již staří Egypťané při výzdobě svých velkolepých staveb bohatými kresbami a reliéfy. Přenášeli je na zdi z připravených malých nákresů pomocí dvou čtvercových sítí: menší sítě pokrývající nákres a větší sítě, kterou sestrojili na zdi; celý obrázek pak překreslovali postupně po jednotlivých čtvercích.



Porovnávání obrazců, které se sice liší svou velikostí, ne však svým tvarem, je velmi účinnou geometrickou metodou s širokým praktickým uplatněním v astronomii, architektuře, optice, geodézii, kartografii i jiných oborech. Proto si *obrazce téhož tvaru* samozřejmě zasloužily přesné matematické vymezení a pojmenování: říkáme jim *podobné útvary*. Nejdůležitějším příkladem podobných (rovinných) útvarů jsou bezesporu *podobné trojúhelníky*, neboť právě jejich vlastnosti uplatňujeme téměř vždy, když řešíme úlohy o podobných útvarech nebo úlohy, v nichž se „podobnostní“ tematika projeví až v průběhu řešení.

Podobné trojúhelníky využívali stavitelé egyptských pyramid. Hrany všech pyramid totiž svírají s vodorovnou rovinou týž úhel; domníváme se, že byl přenášen právě pomocí trojúhelníků s určeným poměrem stran. Nasvěd-

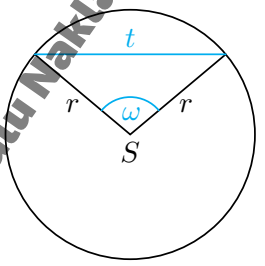
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheusnakl.cz

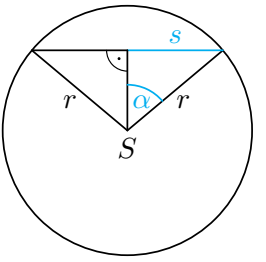
čuje tomu úloha o vyměřování pyramid z *Rhindova papyru* (asi z r. 1650 před Kristem).

Některé důležité poznatky o úměrných úsečkách a podobných útvarech objevili starořečtí matematikové (zvaní *pythagorejci*) v 6. a 5. století před Kristem. Použili je k řešení takových důležitých úloh, jako jsou rozdělení úsečky v daném poměru nebo sestrojení třetí a čtvrté úměrné, tj. konstrukční řešení rovnic $a : b = b : x$ a $a : b = c : y$, ve kterých jsou a, b, c délky dané a x, y délky neznámé.

Z praktických potřeb starověkých civilizací (sestavit funkční kalendář, určit kurs lodi na širém moři podle postavení hvězd, měřit denní čas podle pohybu Slunce, určit vzdálenosti zeměpisných míst a nakreslit mapu daného území) rostl význam přesného měření stran a úhlů trojúhelníků a jejich výpočtů z daných prvků. Pravidla těchto výpočtů dnes tvoří ucelený systém, matematický obor zvaný *trigonometrie* (slovo řeckého původu, v doslovném překladu „měření trojúhelníku“). První známé trigonometrické poznatky spojujeme s astronomií starých Babyloňanů. Staří Řekové je od nich převzali po Alexandrově tažení do Asie (356–323 před Kristem), včetně vyjadřování velikostí úhlů ve stupních.

Největší zásluhy o rozvoj starořecké trigonometrie mají Hippokrates z Chiu, Hipparchos, Menelaos z Alexandrie a Klaudios Ptolemaios. Tito učenci již uměli redukovat výpočty prvků obecného trojúhelníku na výpočty prvků trojúhelníků rovnoramenných, jejichž základny jsou vlastně tětivy kružnic se středy v protilehlých vrcholech. Zároveň správně vytušili, že *přesnou* délku tětivy t, která v kružnici o poloměru r odpovídá středovému úhlu ω (obrázek vlevo), nelze obecně *vyčíslit* z velikosti úhlu ω žádným aritmetickým postupem (tj. užitím konečného počtu operací $+$, $-$, $\times$, $:$ a $\sqrt{\ }$). Proto bylo nutné s ohledem na naléhavé potřeby praxe délky tětiv t v závislosti na úhlu ω zjišťovat alespoň přibližně a poskytnout je veřejnosti v příhodné formě *tabulek*.





Tak například Ptolemaios tabeloval délky tětiv pro středový úhel ω v rozmezí od 0,5 stupně do 180 stupňů s intervalem 0,5° (při jednotce

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

délky rovné jedné šedesátině poloměru kružnice). Nebudeme vysvětlovat, jak tyto přibližné délky Ptolemaios *počítal*, poznamenejme jen, že je prakticky nemožné dosáhnout přesnosti Ptolemaiových hodnot (šest platných číslic) pouhým rýsováním a měřením.

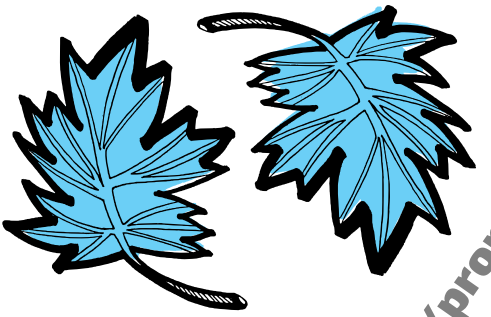
Ve středověku převzali vedoucí roli v trigonometrii (podobně jako v ostatních matematických oborech) obyvatelé Indie, zemí střední Asie a Blízkého východu. Kromě objevů nových vzorců přišli s důležitou koncepční změnou: za základní prostředek výpočtů vybrali nikoliv závislost délky tětivy t na středovém úhlu ω, nýbrž závislost délky „půltětivy“ s na polovičním středovém úhlu α (pravý obrázek na předchozí straně). Tato zdařilá změna dovolila zavést několik funkcí zmíněného úhlu α pomocí poměrů stran pravoúhlého trojúhelníku, jehož vrcholy jsou krajní body příslušné „půltětivy“ spolu se středem S uvažované kružnice. O několik století později tyto funkce prokázaly svůj význam v matematické analýze i dalších oborech, které tematicky s výpočty prvků trojúhelníků příliš nesouvisí.

Ptolemaiův úctyhodný počtářský výkon při sestavování tabulek délek tětiv byl v pozdější středověké a novověké historii mnohokrát překonán. Tak například *Rhaeticus*, žák *Mikuláše Koperníka*, pracoval po roce 1541 s řadou pomocníků po 12 let na tabulkách, ze kterých lze určovat délky tětiv s přesností na 15 platných číslic. Sestavování takových tabulek bylo současně i stimulem ke zdokonalování teorie stojící v pozadí příslušných výpočtů, a tak se objevovaly nové trigonometrické vzorce a poučky. V dnešní době trigonometrické tabulky ztratily svůj význam, nahradily je totiž počítačové programy, které jsou založeny na vyjádření funkcí úhlů nekonečnými řadami. Samotná trigonometrie však svůj význam neztratila, bez jejích výsledků a metod se neobejdeme ani v nejnovějších oblastech vědy a techniky při vyhodnocování údajů o prostorových vztazích (navigační programy letadel, raket a kosmických lodí, modelování objektů na počítačích architektů a designérů, počítačová tomografie v lékařství apod.).

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

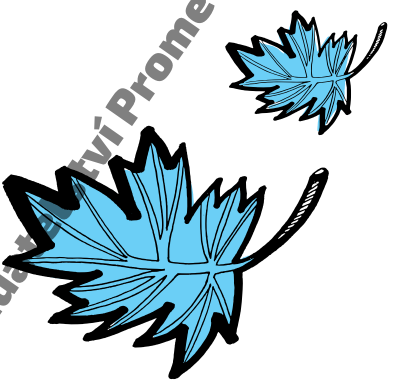
1 PODOBNOST ÚTVARŮ

Na obrázku jsou nakresleny dva listy:



Nejspíš usoudíte, že jsou „stejné“ – to znamená, že mají stejný „tvar“ i stejnou „velikost“, liší se jen umístěním v rovině. Víte již, že takové útvary se v geometrii nazývají *shodné*. O shodnosti obou listů se můžeme přesvědčit tak, že jeden z nich překreslíme na průsvitný papír a získanou kopii položíme na druhý list tak, aby se s ním kryla.

Na dalším obrázku jsou dva listy, které se svou „velikostí“ zjevně liší, „tvar“ však mají stejný.



Co vlastně tvrzení o „stejném tvaru“ znamená a jak ho prakticky ověřit?

Jednoduchý pokus s průsvitným papírem tentokrát nestačí. Pomohl by nám však zvětšovací přístroj, s jehož pomocí bychom začali například menší list postupně zvětšovat, a sledovali bychom, zda se v některém okamžiku zvětšenina shoduje s větším listem. Pokud se tak stane, řekneme, že rovinné útvary, které dané dva listy znázorňují, jsou *podobné*. Základním vlastnostem podobných útvarů se nyní budeme věnovat podrobně. Nejdříve si však připomeneme podmínku, která zaručuje shodnost dvou útvarů.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Ty lze splnit pouze v případě, kdy platí

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}\,.$$

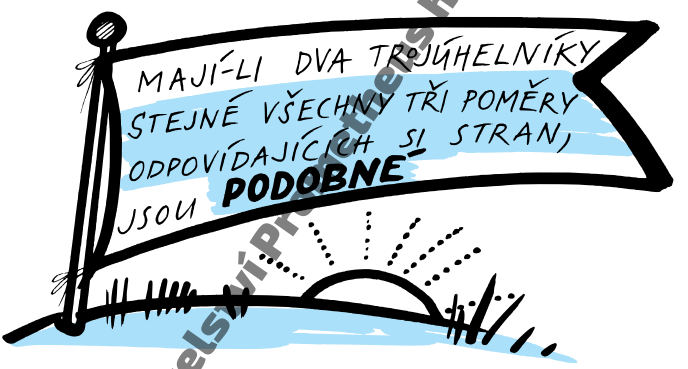
Za této podmínky jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ podobné.

Odvodili jsme tak tvrzení, které se nazývá **věta *sss* o podobnosti trojúhelníků**.

Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

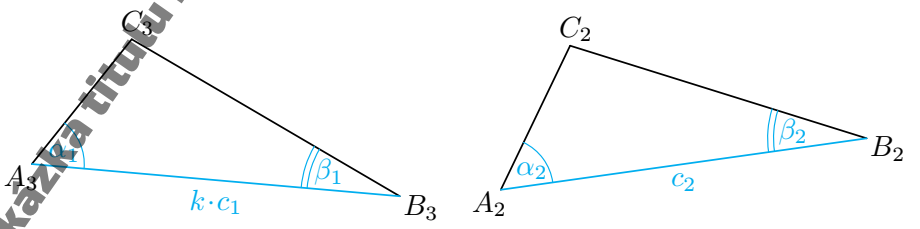
$$\frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|}\,,$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$



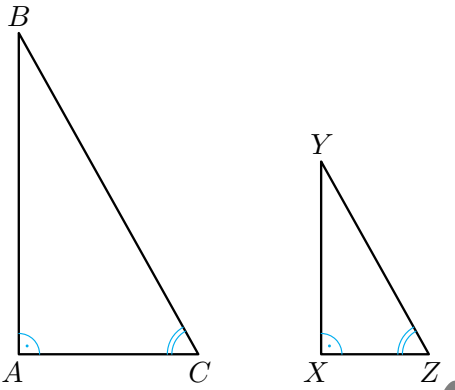
- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *usu*?

Je to tehdy, když se oba trojúhelníky shodují v jedné straně a obou k ní přilehlých vnitřních úhlech, například:



$$kc_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2$$

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz



Protože sluneční paprsky jsou rovnoběžné, jsou úhly ACB a XZY shodné (rovné úhlu, pod kterým dopadají paprsky na vodorovnou rovinu). Pravoúhlé trojúhelníky ACB a XZY jsou tedy podobné, proto platí

$$\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|AC|}{|XZ|}, \qquad \text{tedy} \qquad |AB| = \frac{|AC|}{|XZ|} \cdot |XY|.$$

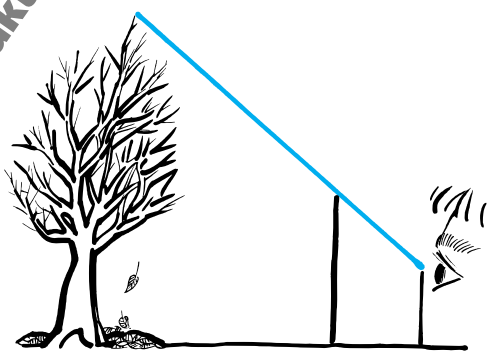
Po dosazení $|XY| = 1{,}7\,\mathrm{m}$, $|XZ| = 0{,}75\,\mathrm{m}$, $|AC| = 8\,\mathrm{m}$ vychází

$$|AB| = \frac{8}{0{,}75} \cdot 1{,}7\,\mathrm{m} \doteq 18{,}1\,\mathrm{m}.$$

Strom byl vysoký přibližně 18,1 m.

Měření stínů využil pravděpodobně i starořecký matematik *Thales z Milétu* (625 – 545 př. Kr.), který touto metodou určil výšku egyptských pyramid.

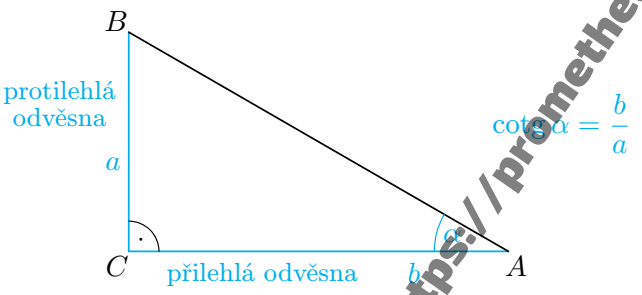
Určování výšky stromu pomocí stínu je samozřejmě možné jen za slunečného počasí. Za oblačného dne můžeme výšku stromu určit pomocí dvou tyčí různých délek. Delší z nich postavíme svisle ve vhodné vzdálenosti od stromu a kratší tyč postavíme dále od stromu tak, aby vrchol stromu a vrcholy obou tyčí ležely v jedné přímce:



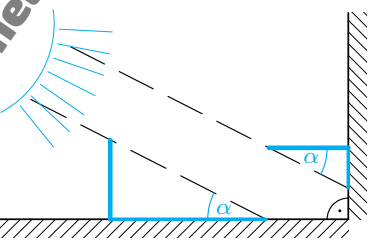
Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

? Co je *kotangens* ostrého úhlu?

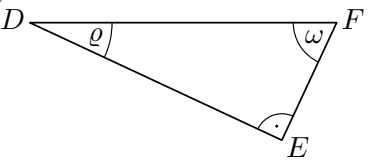
V úvodu této kapitoly jsme vysvětlili, že poměr odvěsny protilehlé úhlu α a odvěsny přilehlé úhlu α nezávisí na tom, jak „velký“ pravoúhlý trojúhelník s daným ostrým vnitřním úhlem α vybereme. Je jasné, že stejnou vlastnost má i „převrácený“ poměr, tj. *poměr odvěsny přilehlé úhlu α a odvěsny protilehlé úhlu α*. Nazývá se **kotangens úhlu α** a značí se $\operatorname{cotg}\alpha$ (čti „kotangens alfa“).



Stejně jako slovo *tangens* je i slovo *kotangens* nesklonné. Název *tangens* vznikl v Evropě na přelomu 16. a 17. století, poměry odvěsen se však již v 9. století zabývali učenci střední Asie, když určovali výšku Slunce na základě délky stínu vrženého svislou nebo vodorovnou tyčí. Příslušné úsečky podle toho nazývali *první stín* (vodorovný stín svislé tyče, odpovídá hodnotě kotangens α) a *druhý stín* (svislý stín vodorovné tyče, odpovídá hodnotě tangens α).

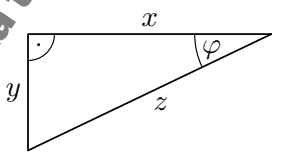


11. Zapište kotangens úhlů ϱ a ω pomocí délek stran trojúhelníku DEF:

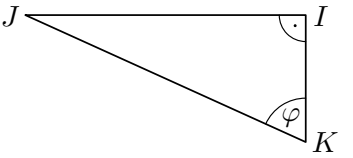


12. Zapište kotangens úhlu φ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a)

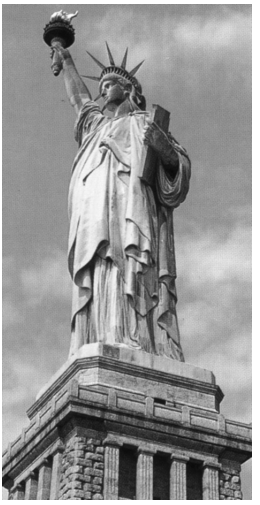


b)

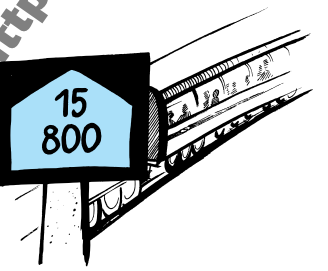


Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

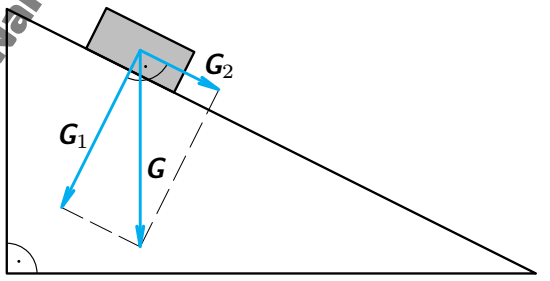
9. Vjezdu do přístavu v New Yorku dominuje Socha Svobody. Samotná socha je vysoká 46 metrů a podstavec pod ní má výšku 47 metrů. Jak daleko je od ní vzdálen pozorovatel, který vidí vrchol pochodně, již drží socha nad hlavou, pod úhlem 60°?



10. Tato železniční značka znamená stoupání 15 ‰ na trati, jejíž konce mají podle mapy vzdálenost 800 m. Pod jakým úhlem trať na vymezeném úseku stoupá?



V závěru kapitoly se budeme zabývat důležitou úlohou z fyziky, úlohou o tělese na nakloněné rovině. Tíhová síla $\boldsymbol{G}$, kterou Země na těleso působí, má dvojí účinek: jednak „přitlačuje“ těleso k nakloněné rovině, jednak způsobuje jeho pohyb po nakloněné rovině dolů (pokud „překoná“ sílu tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou).



Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz