OBSAH

ÚVOD

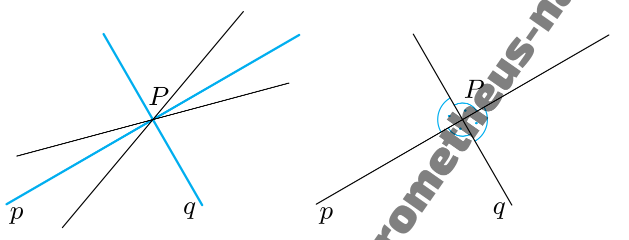
Svět, ve kterém žijeme, je třírozměrný prostor, ke kterému podle současné fyziky patří neoddělitelně i čtvrtý rozměr – čas. Díky zraku, našemu nejcennějšímu smyslu, se odmalička učíme prostorové orientaci a osvojujeme si základní poznatky o tvaru a velikosti těles a změnách jejich vzájemné polohy, kterých lze různými pohyby v prostoru dosáhnout. V prostorových vztazích se v jisté míře (úměrné složitosti způsobu života) musí „vyznat“ každý živý tvor naší planety.

O tvaru a velikosti těles již jistě přemýšleli pravěcí lidé, když například odhadovali množství materiálu potřebného k výstavbě primitivních obydlí či hledali nejvhodnější formy nádob nebo sýpek. Uplynula dlouhá doba, než lidé přešli od pouhého porovnávání objemů k jejich měření a výpočtům podle tvarů a rozměrů těles. Tak starověcí Babyloňané již dokázali počítat objemy pevnostních valů s lichoběžníkovým průřezem, Egypťané znali například postup, jak určit objem sýpky, která má tvar válce. Skutečného mistrovství ve výpočtech objemů různých těles dosáhli matematikové antického Řecka, zejména *Archimédes ze Syrakus* (3. stol. před Kristem) a *Pappos z Alexandrie* (3. stol. po Kristu). Archimédovo důmyslné odvození vzorců pro objem a povrch koule je snad nejvýraznějším projevem jeho matematické geniality; sám Archimédes si natolik cenil poznatek o tom, že *kužel, polokoule a válec o stejných podstavách a výškách mají objemy v poměru* $1:2:3$, že si přál mít na svém náhrobku reliéf válce s vepsanou koulí. Stejné vyobrazení pak bylo rovněž raženo na mincích města Syrakus. Druhý zmíněný Řek Pappos Archimédovy vzorce zobecnil, když objevil pravidlo, podle kterého lze určit objem obecného, tzv. rotačního tělesa, tedy tělesa, jež vznikne otáčením rovinného obrazce v prostoru kolem pevné přímky.

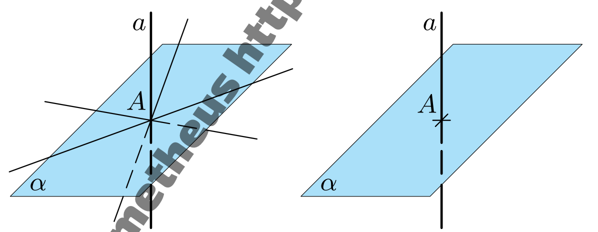
Stavby monumentálních náhrobků staroegyptských faraonů nebo majestátně rozlehlých antických chrámů kladly před tehdejší architekty obtížné prostorové úkoly. Nebylo by možné je vyřešit s takovou přesností, jakou dodnes na těchto památkách obdivujeme, bez dokonalého ovládnutí *základů stereometrie* (geometrie třírozměrného prostoru), k nimž patří určování vzájemných poloh, vzdáleností a odchylek přímek a rovin. Právě s těmito poznatky vás chce naše učebnice seznámit především. I když se třeba nestanete architekty, dobrou prostorovou představivost podloženou znalostí „školní stereometrie“ uplatníte i v mnoha dalších oborech přírodních věd, techniky či různých druzích výtvarné činnosti (průmyslový design, navrhování reklamy apod.).

2 KOLMOST PŘÍMEK A ROVIN

Z hodin planimetrie víte, že mezi všemi různoběžkami, které procházejí daným bodem P dané přímky p, má jedna přímka q vzhledem k přímce p „zvláštní postavení“. Všechny čtyři úhly, na které je rovina přímkami p, q rozdělena, jsou tedy shodné (a pravé). Právě o takových přímkách p, q říkáme, že jsou navzájem *kolmé*.



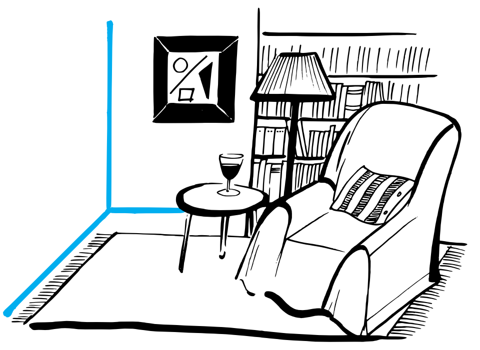
V této kapitole se budeme zabývat kolmostí v prostoru. Ukážeme, že pokud je v prostoru dána rovina α a v ní bod A, má mezi všemi přímkami, které procházejí bodem A, podobné „výjimečné“ postavení vzhledem k rovině α jediná přímka a. Nazveme ji přímkou *kolmou* k rovině α.



Na obrázku zatím není vyznačeno, v čem zmíněná výjimečnost přímky a spočívá. Uhodnete to sami?

Kdy je přímka kolmá k rovině?

Názornou představu o kolmosti přímek a rovin jsme získali již v učivu o hranolech, kdy jsme využívali zkušeností se svislými přímkami a vodorovnými rovinami ze světa kolem nás.

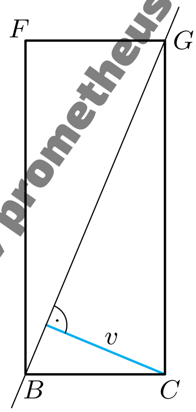


Z Pythagorovy věty vypočteme délku přepony BG:

$$|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}\,\text{cm} = \sqrt{169}\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$$

K výpočtu výšky v použijeme tento „trik“: Vyjádříme dvěma způsoby obsah S trojúhelníku BCG

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CG|,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot |BG| \cdot v$$



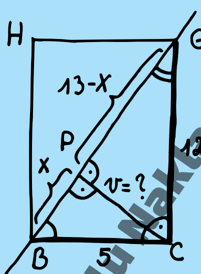
a porovnáním dostaneme:

$$|BC| \cdot |CG| = |BG| \cdot v$$
$$v = \frac{|BC| \cdot |CG|}{|BG|}$$
$$v = \frac{5 \cdot 12}{13}\,\text{cm} \doteq 4{,}6\,\text{cm}$$

Vzdálenost bodu C od přímky BG je asi 4,6 cm.

Kosťa jako my nejprve určil délku přepony BG, pak však místo výpočtu „přes obsah“ využil podobnosti trojúhelníků:

vše v cm:



$|BG| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

$\underbrace{\triangle PBC \sim \triangle CBG \sim \triangle PCG}$ (uu)

$\frac{v}{x} = \frac{|CG|}{|CB|} = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $\frac{v}{13-x} = \frac{|CB|}{|CG|} = \frac{5}{12}$

$\underbrace{v = \frac{12}{5}x \qquad v = \frac{5}{12}\cdot(13-x)}$

$\frac{12}{5}x = \frac{5}{12}\cdot(13-x) \qquad /\cdot 60$

$144x = 25\cdot(13-x)$

$144x = 325 - 25x$

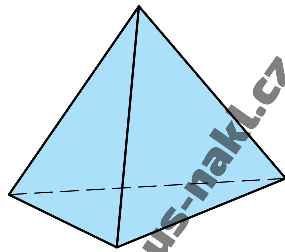
$169x = 325 \qquad /:169$

$x \doteq 1{,}9$

$v = \frac{12}{5}x \doteq \frac{12}{5}\cdot 1{,}9 = 4{,}56 \doteq 4{,}6$

$v \doteq 4{,}6$ cm

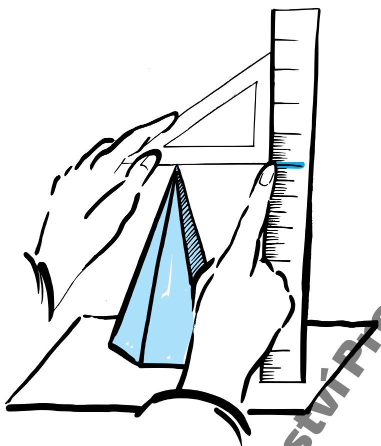
Stěny trojbokého jehlanu tvoří čtyři trojúhelníky. Každý z nich můžeme považovat za podstavu takového jehlanu. Trojboký jehlan také někdy nazýváme *čtyřstěnem*. Čtyřstěn, jehož stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, se nazývá *pravidelný*.



□ **1.** Určete počet vrcholů, hran a stěn n-bokého jehlanu.

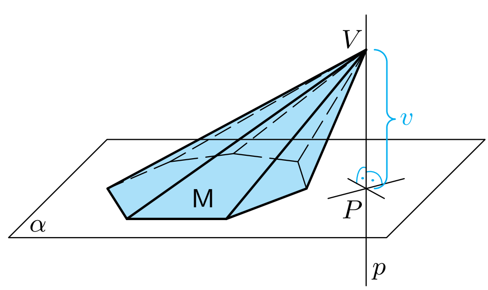
Co je *výška* jehlanu?

K důležitým údajům o daném jehlanu patří i informace o tom, jak „vysoko" se nachází hlavní vrchol nad podstavou, přesněji vyjádřeno, jaká je *vzdálenost* hlavního vrcholu od roviny podstavy.



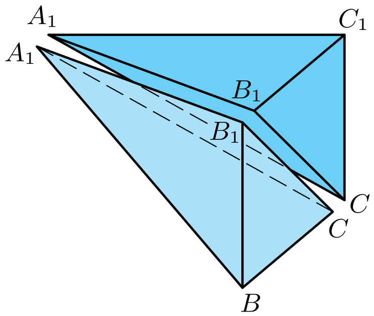
Připomeňme, jak se taková vzdálenost určuje. Pro daný jehlan s hlavním vrcholem V, jehož podstava M leží v rovině α, sestrojíme kolmý průmět P bodu V do roviny α. (Je to průsečík roviny α s přímkou p, která je kolmá k rovině α a prochází bodem V.) Vzdálenost bodu V od roviny α je pak rovna délce úsečky VP.

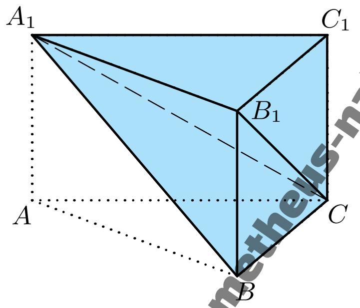
Tuto délku nazýváme *výškou jehlanu* a značíme ji obvykle písmenem v: $v = |VP|$.



Často však výškou jehlanu rozumíme nejen délku zmíněné úsečky VP, ale i úsečku VP samotnou (vzpomeňte na dvojí význam *výšky trojúhelníku*).

Porovnejme nyní jehlany J_2 a J_3:





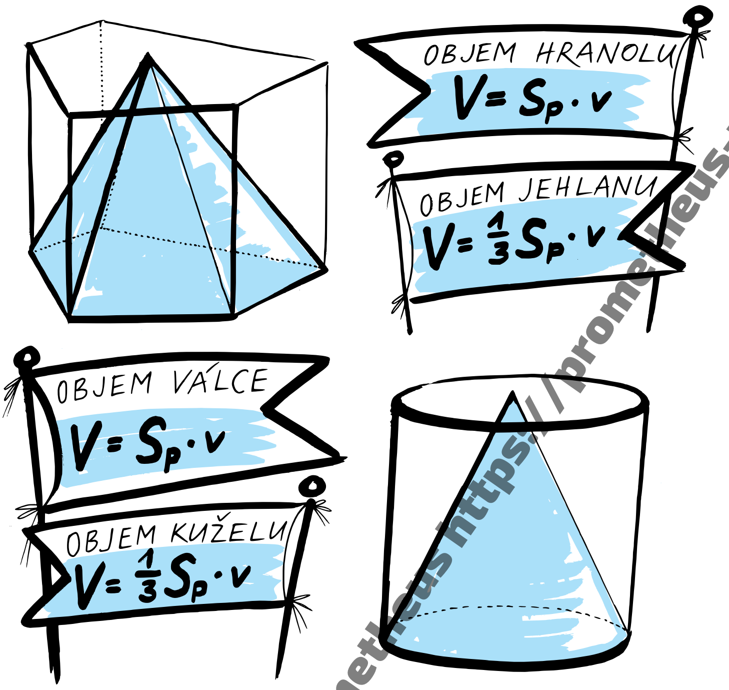
Prohlásíme-li za podstavu jehlanu J_2 trojúhelník B_1C_1C, mají jehlany J_2 a J_3 stejný hlavní vrchol A_1, shodné podstavy ($\triangle BCB_1 \cong \triangle C_1B_1C$), a tudíž i stejné výšky (rovné vzdálenosti bodu A_1 od roviny stěny BCC_1B_1). Proto mají jehlany J_2 a J_3 stejné objemy, takže objem jehlanu J_3 je roven (stejně jako objem jehlanu J_2) objemu V_J původního jehlanu J.

Z rozdělení hranolu H na tři jehlany J_1, J_2, J_3 plyne rovnost

$$V_\mathsf{H} = 3 \cdot V_\mathsf{J}, \quad \text{odkud} \quad V_\mathsf{J} = \tfrac{1}{3} \cdot V_\mathsf{H}.$$

Uvědomme si ještě, že obsah podstavy ABC hranolu H je roven obsahu S_p podstavy ABC jehlanu J a že výška hranolu H je rovna výšce v jehlanu J. Podle vzorce pro objem hranolu proto platí $\mathsf{V}_\mathsf{H} = S_\mathrm{p} \cdot v$, a tak pro objem trojbokého jehlanu vychází vzorec:

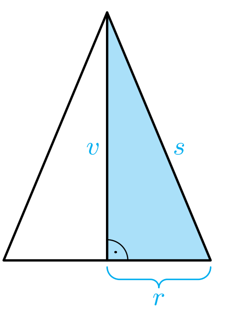
$$\boxed{V_\mathsf{J} = \tfrac{1}{3} \cdot S_\mathrm{p} \cdot v}$$



Příklad 4. Vypočtěte objem kuželu o straně délky 13 cm a výšce 12 cm.

Řešení. Nejprve určíme pomocí Pythagorovy věty poloměr podstavy kuželu:

$$r = \sqrt{s^2 - v^2} = \sqrt{169 - 144}\,\mathrm{cm} =$$
$$= \sqrt{25}\,\mathrm{cm} = 5\,\mathrm{cm}$$



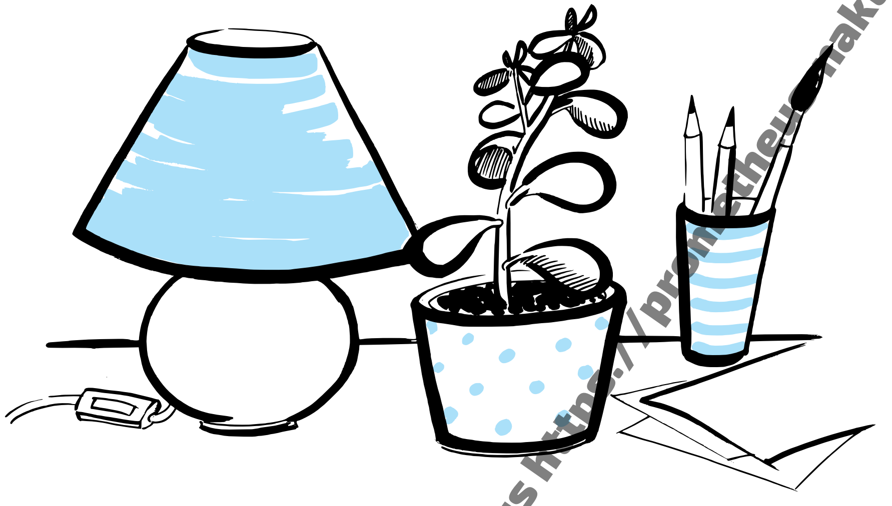
Všechny potřebné údaje k výpočtu objemu V kuželu již známe:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 v = \left(\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12\right)\,\mathrm{cm}^3 = 100\pi\,\mathrm{cm}^3 \doteq 314\,\mathrm{cm}^3$$

Objem kuželu je asi $314\,\mathrm{cm}^3$.

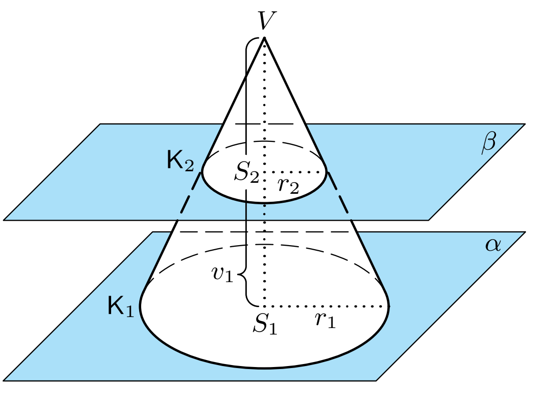
? Jak vzniká komolý kužel a co na něm rozeznáváme?

Některá tělesa na následujícím obrázku mají tvar komolého kuželu.



Vysvětlíme, jak komolý kužel vzniká. Na obrázku je kužel s vrcholem V, jehož podstava K_1 leží v rovině α. Střed podstavy K_1 je označen S_1, její poloměr r_1. Zvolme uvnitř úsečky VS_1 libovolný bod S_2 a veďme jím rovinu β rovnoběžnou s rovinou α (a tedy kolmou k přímce VS_1). Rovina β protne kužel v kruhu K_2 se středem v bodě S_2. Poloměr r_2 kruhu K_2 je menší než poloměr r_1 kruhu K_1.

Rovina β rozděluje kužel na dvě části. Jedna z nich obsahuje úsečku VS_2 a je kuželem s vrcholem V. Druhá část obsahuje úsečku S_1S_2 a je tělesem, kterému říkáme **komolý kužel**.

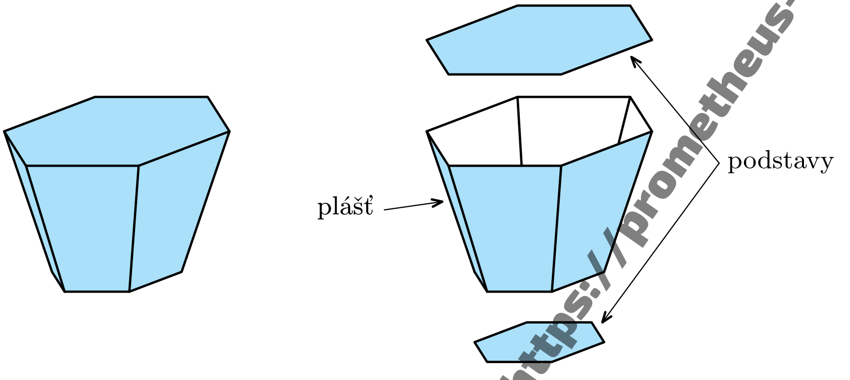


Komolý kužel je omezen dvěma kruhovými *podstavami* a „zakřivenou“ plochou zvanou *plášť*. Vzdálenost rovin obou podstav se jmenuje *výška* komolého kuželu a je rovna vzdálenosti středů jeho podstav. „Odstraněnému“ kuželu říkáme *doplňkový kužel* k danému komolému kuželu.

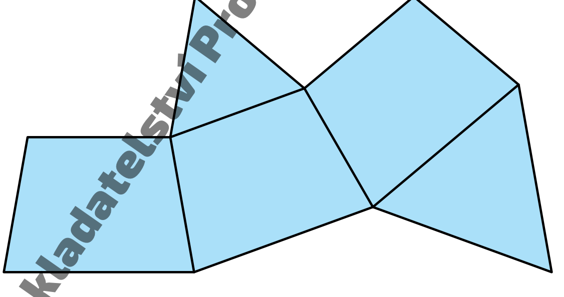
Co je *povrch* komolého jehlanu a jak ho vypočteme?

?

Komolý jehlan je ohraničen dvěma podstavami a bočními stěnami. Sjednocení všech bočních stěn tvoří *plášť* komolého jehlanu. Plášť spolu s oběma podstavami tvoří *povrch* komolého jehlanu.



Jestliže „rozvineme“ stěny komolého jehlanu do roviny, získáme jeho *síť*. Jednu ze sítí pravidelného trojbokého komolého jehlanu si prohlédněte na obrázku:



Také u komolého jehlanu znamená termín *povrch* nejen sjednocení všech stěn, které jehlan ohraničují, ale také součet jejich obsahů. V tomto významu povrch označujeme S a počítáme ho ze vzorce

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_{\mathrm{pl}},}$$

kde S_1, S_2 jsou obsahy podstav komolého jehlanu a S_{pl} obsah jeho pláště.