Obsah

Úvod

Také v tomto dílu učebnice zůstanou v platnosti úmluvy, na kterých jsme se domluvili v dílech předcházejících. Jde zejména o dohody následující:

1. Není-li uveden obor, ve kterém má být řešena daná rovnice nebo nerovnice, řešíme ji v oboru reálných čísel.
2. Není-li uveden definiční obor dané funkce, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž má výraz, kterým je tato funkce definována, smysl.
3. Není-li v textu uvedeno, o jaká čísla se jedná, máme na mysli čísla reálná.
4. Soustavou souřadnic se rozumí souřadnicová soustava kartézská, její osy jsou navzájem kolmé a jednotky délky na obou osách jsou stejné.

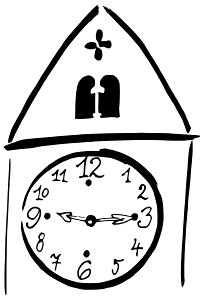
Připomeňme si ještě, že obrázek sovy na začátku odstavce nebo příkladu znamená, že následující část textu látku mírně obohacuje (takže je něčím „navíc“) nebo že takto označený příklad je obtížnější.

Na to, že učebnici nestačí jen pasivně pročítat, ale že se musíte aktivně snažit o porozumění látce v ní vyložené, jste už jistě přišli sami.

Autor

AC, aby splynulo s ramenem koncovým AB, je $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{CAB}$ je tedy $\frac{5}{3}\pi$ a všechny jeho velikosti jsou čísla $\frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$.

Podobným způsobem se můžete přesvědčit, že základní velikosti orientovaných úhlů ve čtverci $ABCD$ na obr. 1.9 jsou: $\frac{\pi}{2}$ pro úhel $\widehat{BAD}$, $\frac{\pi}{4}$ pro úhel $\widehat{CBD}$, $\frac{3}{2}\pi$ pro úhel $\widehat{BCD}$ a $\frac{7}{4}\pi$ pro úhel $\widehat{BDA}$.



Příklad 7

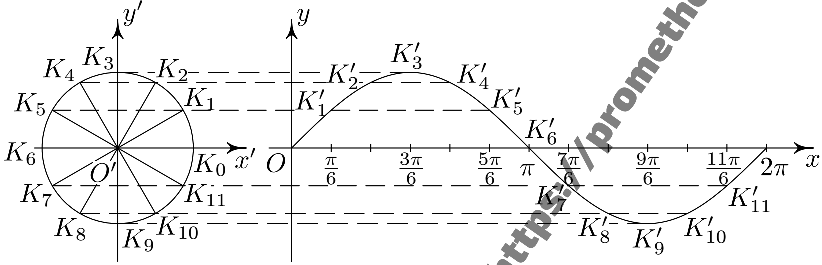
Od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly čtvrt na deset, se minutová ručička pootočila o úhel $-\frac{28}{3}\pi$. Určete, kolik hodin ukazovaly ručičky potom.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $-\frac{28}{3}\pi = -8\pi - \frac{4}{3}\pi = 4\cdot(-2\pi) - \frac{4}{3}\pi$, vykonala minutová ručička od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly čtvrt na deset, čtyři celé oběhy a navíc se otočila o $-\frac{4}{3}\pi$ rad. Protože minutová ručička se za dobu pěti minut otočí o úhel $-\frac{\pi}{6}$, otočí se o úhel $-\frac{4}{3}\pi = 8\cdot(-\frac{\pi}{6})$ za dobu osmkrát delší, tj. za 40 minut. Od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly čtvrt na deset, uplynuly celkem 4 hodiny a 40 minut, takže po této době ukazovaly 13 hodin a 55 minut.

Příklad 8

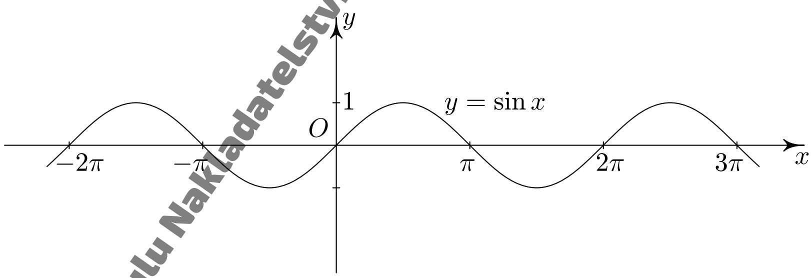
Sestrojte orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, jehož počáteční rameno je daná polopřímka VA a jehož velikost je $-\frac{8}{3}\pi$.

Řešení. Úkolem je sestrojit koncové rameno VB orientovaného úhlu, který je dán ramenem počátečním a jednou ze svých velikostí. Koncové rameno VB sestrojíme tak, že počáteční rameno VA otočíme kolem bodu V o úhel velikosti $-\frac{8}{3}\pi = -2\pi - \frac{2}{3}\pi$. Vzhledem k tomu, že orientorovna hodnotě sinu příslušného úhlu. V nové souřadnicové soustavě Oxy nyní sestrojíme body $K'_0 = O$, K'_1, K'_2, …, K'_{11}, jejichž x-ové souřadnice jsou po řadě 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{6}$, …, $\frac{11\pi}{6}$ a jejichž souřadnice y-ové jsou rovny y-ovým souřadnicím odpovídajících bodů K_0, K_1, K_2, …, K_{11}. Body K'_0, K'_1, K'_2, …, K'_{11} leží na křivce, která je grafem funkce sinus; nazývá se **sinusoida**. Vyšetříme nyní vlastnosti této křivky.



Obr. 1.20

Protože sinus je funkce periodická, jejíž hlavní perioda je 2π a jejíž definiční obor je množina R, má sinusoida v každém intervalu $\langle 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\rangle$, kde $k \in \mathsf{Z}$, stejný průběh jako v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$; je to znázorněno na obr. 1.21. Vzhledem k tomu, že pro všechna reálná čísla x platí $|\sin x| \leqq 1$, leží sinusoida v pásu určeném rovnoběžkami $y = 1$ a $y = -1$.



Obr. 1.21

Je rovněž užitečné si zapamatovat, pro které hodnoty x je $\sin x = 0$. Z grafu funkce sinus je vidět, že platí:

$$\sin x = 0 \text{ pro všechny celé násobky čísla } \pi,$$
$$\text{tj. pro všechna } x = k\pi,\ k \in \mathsf{Z};$$

Příklad 35

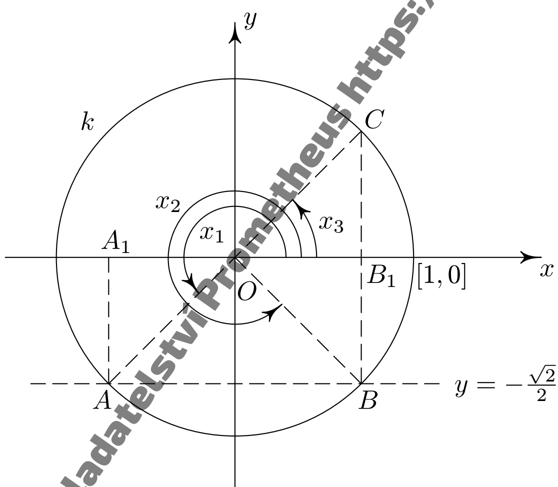
Řešte rovnici a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Řešení. a) Z obr. 1.48a, na němž je zakreslena jednotková kružnice a přímka $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, je patrné, že kořeny dané rovnice v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ jsou čísla x_1, x_2. Protože trojúhelníky OA_1A, OB_1C jsou shodné, platí

$$|AA_1| = |CB_1| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

neboli

$$|\sin x_1| = \sin x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Obr. 1.48a

Vzhledem k tomu, že x_3 je úhel ostrý, platí $x_3 = \dfrac{\pi}{4}$, takže

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi.$$

Ze shodnosti trojúhelníků OB_1B a OB_1C dostaneme podobně

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi.$$

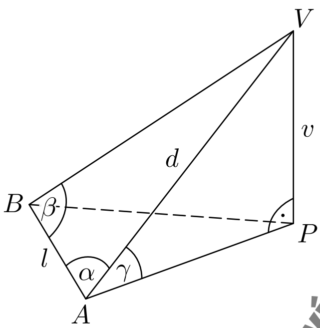
Poznámka. Jak jsme právě viděli, je při výpočtu velikosti úhlu pomocí sinové věty nutno rozhodnout, která z vypočtených velikostí je přípustná a která nikoli; kladné hodnotě $\sin\alpha$ (pokud není rovna jedné) odpovídají totiž dva úhly: jeden ostrý a jeden tupý.

S příklady, které využívají sinové věty k praktickým účelům, se seznámíme v článku 2.4. Jednu ukázku si však dopřejeme už nyní.

Příklad 5

K výpočtu výšky vrcholu V strmé hory nad vodorovnou rovinou byla v této rovině podle obr. 2.6 změřena vzdálenost AB, výškový úhel γ, pod nímž je vidět vrchol V z bodu A, a úhly α, β. Určete výšku v vrcholu V, jestliže:

$$|AB| = l = 180\,\text{m}, \quad \gamma = 23°20', \quad \alpha = 85°45', \quad \beta = 86°15'$$



Obr. 2.6

Řešení. Ujasníme si nejprve, jak budeme postupovat. Neznámou výšku v určíme z pravoúhlého trojúhelníku PVA, a to pomocí daného úhlu γ a přepony d, která sice dána není, ale kterou umíme z trojúhelníku ABV určit: známe v něm stranu AB a úhly α, β. Tímto způsobem dostaneme:

$$v = d\sin\gamma \quad \text{– z pravoúhlého trojúhelníku } PVA$$

$$d = l\,\frac{\sin\beta}{\sin(180° - (\beta+\alpha))} = l\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{– z trojúhelníku } ABV$$

Dosazením d do výrazu pro výšku v získáme obecný výsledek

$$v = d\sin\gamma = l\,\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

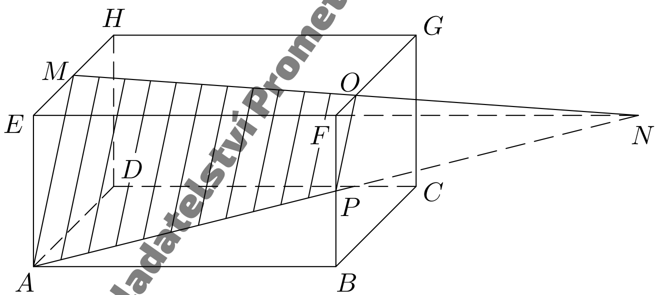
3.10 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečnici roviny CDV s rovinou, která prochází bodem V a je rovnoběžná s rovinou ABD.

3.3 Řezy hranolů a jehlanů rovinou

S užitím vět, s nimiž jsme se seznámili v předchozích článcích, si na konkrétních příkladech ukážeme, jak se sestrojují průniky daných těles s danou rovinou; místo o průniku tělesa a roviny mluvíme obvykle **o řezu tělesa rovinou**. Konstrukci řezů budeme jako dosud provádět ve volném rovnoběžném promítání.

Příklad 8

Na obr. 3.12 je dán kvádr $ABCDEFGH$ a rovina $\varrho = AMN$, kde M je střed hrany EH a bod N leží na prodloužení úsečky EF za bod F tak, že bod F je středem úsečky EN. Zobrazte řez daného kvádru rovinou ϱ.

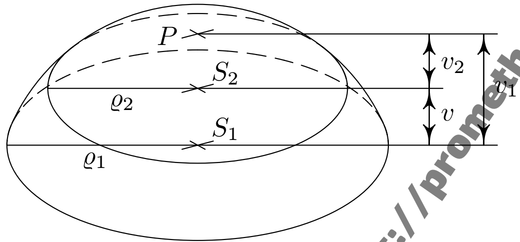


Obr. 3.12

Řešení. Průsečnice roviny ϱ s rovinou AEH je přímka AM, neboť body A, M leží v obou rovinách. Body M, N leží v rovině ϱ i v rovině EFG, takže průsečnicí těchto rovin je přímka MN, která protne hranu FG v bodě O. Body A, N leží v rovině ϱ a v rovině ABE, takže přímka AN, která protne hranu BF v bodě P, je průsečnicí roviny ϱ a roviny ABE. Body O, P leží v rovině ϱ i v rovině BCG, takže určují průsečnici těchto rovin. (Bod P jsme také mohli sestrojit jako průsečík hrany BF

Vzorec pro obsah S kulového pásu získáme snadno ze vzorce pro obsah vrchlíku. Podle obr. 3.53 dostaneme obsah S kulového pásu o výšce v a s poloměry ϱ_1, ϱ_2 hraničních kružnic tak, že od obsahu vrchlíku o výšce v_1 odečteme obsah vrchlíku o výšce v_2:

$$S = 2\pi r v_1 - 2\pi r v_2 = 2\pi r(v_1 - v_2) = 2\pi r v$$



Obr. 3.53

Pro obsah S kulového pásu, který má výšku v a je částí kulové plochy o poloměru r, platí:

$$S = 2\pi r v$$

Všimněte si, že pro obsah vrchlíku i kulového pásu platí stejný vzorec: $S = 2\pi r v$; r je poloměr kulové plochy, jejíž částí vrchlík nebo kulový pás je, a v je výška vrchlíku nebo výška kulového pásu.

Poznámka. Je zřejmé, že povrch kulové vrstvy je roven součtu obsahů jejích podstav a kulového pásu, který ji „obepíná“.

Příklad 29

Dřevěná koule plove na hladině vody tak, že je ponořena do tří pětin svého průměru. Určete hustotu dřeva, z něhož je vyrobena.

Řešení. Podle Archimedova zákona je tíha vody vytlačené koulí rovna tíze dané koule. Označíme-li V_1 objem vytlačené kapaliny, ϱ_1 její hustotu, V_2 objem koule, ϱ_2 hustotu dřeva, z něhož je vyrobena, a g tíhové zrychlení, platí

$$V_1\varrho_1 g = V_2\varrho_2 g, \quad \text{odkud} \quad \varrho_2 = \frac{V_1}{V_2}\varrho_1.$$

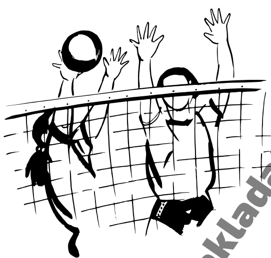
Vrátíme-li se k počtu $K(k,n)$ k-členných kombinací z n prvků, můžeme výsledek, který jsme odvodili, formulovat takto:

> Pro počet $K(k,n)$ všech k-členných kombinací z n prvků platí:
>
> $$K(k,n) = \binom{n}{k}$$

Protože k-členná kombinace z n prvků je totéž co k-prvková podmnožina n-prvkové množiny, znamená výše uvedený výsledek:

> Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet všech k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Poznámka. Vlastnostmi kombinačních čísel se budeme zabývat v následujícím článku. Uveďme však, že definice kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ se dá rozšířit i na celá nezáporná čísla $k > n$ tak, že pro $k > n$ je $\binom{n}{k} = 0$. Je to v souladu s tím, že pro $k > n$ žádné k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny neexistují.



Příklad 13

Volejbalového turnaje se zúčastní osm družstev. Určete, kolik utkání bude sehráno, jestliže
a) turnaj se hraje systémem každý s každým,
b) družstva se rozlosují do dvou čtyřčlenných skupin, ve kterých bude hrát každé s každým, a potom se o první místo utkají vítězové skupin a o místo třetí druzí z obou skupin.

Řešení. a) Každé utkání je určeno dvojicí, ve které nezáleží na pořadí a ve které je každé z osmi družstev nejvýše jednou. Počet všech utkání je tak roven počtu těchto dvojic, tj. počtu všech dvojčlenných kombinací z osmi prvků:

$$K(2,8) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

5 PRAVDĚPODOBNOST

5.1 Náhodné pokusy a jevy

O teorii pravděpodobnosti se říká, že se narodila za hracím stolkem. Vznikla totiž v polovině 17. století na základě studia různých typů hazardních her, které ke zkoumání zákonitostí náhody poskytovaly rozsáhlý a přitom poměrně jednoduchý empirický materiál. To je také důvod, proč i v současných učebnicích je většina příkladů volena z této oblasti. Základy teorie pravděpodobnosti položili svými pracemi B. Pascal (1623–1662), P. Fermat (1601–1665), J. Bernoulli (1654–1705).

Na začátku volejbalového utkání se losuje o to, které družstvo začne podávat jako první. Losování se obvykle provádí hodem mince: podávat začne družstvo, jemuž padne ta strana mince, kterou si zvolil jeho kapitán. Tento způsob losování, tj. hod mince, je příkladem náhodného pokusu.

Pro náhodné pokusy je charakteristické, že jejich výsledek nelze předem stanovit; je určen velkým množstvím vzájemně se ovlivňujících okolností, jejichž podrobné prozkoumání přesahuje naše možnosti. Klasickými příklady náhodných pokusů — kromě už uvedeného hodu mincí — jsou rozdání karet, hod kostkou, tah sportky, otočení rulety apod. V teorii pravděpodobnosti má však pojem náhodného pokusu širší význam: za náhodné pokusy se považují i pokusy, kterými se zkoumá účinek nových léků, pokusy, které slouží k vypěstování a ke zjištění výnosu nové odrůdy zemědělské plodiny, pokusy ověřující účinnost reklamy atd.

Bylo už řečeno, že u náhodného pokusu není možné předem určit jeho výsledek. Je však důležité, že u některých lze zjistit všechny výsledky, které mohou nastat. Splňuje-li výčet těchto možných výsledků požadavek, že **žádné dva nenastanou současně a že jeden z nich**