OBSAH

1.1 KINEMATIKA

ROVNOMĚRNÝ PŘÍMOČARÝ POHYB

Pohyb po přímce, při kterém hmotný bod urazí za stejné, ale jinak libovolné časové intervaly stejné dráhy, se nazývá *rovnoměrný přímočarý pohyb.*
Velikost rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu je dána vztahem

$$v = \frac{s}{t},$$

kde s je dráha, kterou urazí hmotný bod za dobu t. Dráhu při tomto pohybu určíme ze vztahu

$$s = vt.$$

Vztah $s = vt$ platí za předpokladu, že v čase $t = 0$ je dráha hmotného bodu $s_0 = 0$. Jestliže v čase $t = 0$ je dráha $s_0 \neq 0$, platí pro dráhu rovnoměrného přímočarého pohybu vztah

$$s = vt + s_0.$$

PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Průměrná rychlost v_p nerovnoměrného pohybu je definována vztahem

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t},$$

kde s je celková dráha, kterou urazí hmotný bod při nerovnoměrném pohybu za dobu t.

ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB

Pohyb, při kterém hmotný bod za stejné, ale jinak libovolné časové intervaly zvětší velikost své rychlosti o stejnou hodnotu, se nazývá *rovnoměrně zrychlený pohyb.*
Velikost zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu je dána vztahem

$$a = \frac{v}{t}, \quad \text{popř. obecněji} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Jestliže hmotný bod vykonává rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí, platí pro velikost jeho rychlosti a pro dráhu vztahy ukazuje, že rychlost motocyklu je pro předjíždění za daných podmínek příliš malá; předjíždění by nebylo bezpečné.

PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Úloha 7

Chodec urazil rovnoměrným pohybem za prvních 6 sekund dráhu 9 m, za následující 4 sekundy dráhu 8 m. Jakou rychlostí se pohyboval v prvních šesti a v následujících čtyřech sekundách? Jaká je jeho průměrná rychlost za prvních 10 sekund pohybu?

Řešení

$t_1 = 6$ s, $s_1 = 9$ m, $t_2 = 4$ s, $s_2 = 8$ m; $v_1 = ?$, $v_2 = ?$, $v_\mathrm{p} = ?$

Pro hledané rychlosti v_1 a v_2 platí

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{9}{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{8}{4}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Průměrná rychlost v_p je určena podílem celkové dráhy $\Delta s = s_1 + s_2$ a celkové doby $\Delta t = t_1 + t_2$, za kterou těleso tuto dráhu urazí:

$$v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{9 + 8}{6 + 4}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Chodec se pohybuje první část dráhy rychlostí $1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, druhou část rychlostí $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Průměrná rychlost chodce na obou úsecích dráhy je $1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

✎ *Poznámka*

Je důležité si uvědomit, že průměrná rychlost v_p se obecně nerovná aritmetickému průměru rychlostí v_1 a v_2 (přesvědčte se o tom numerickým výpočtem).

Úloha 8

Auto se pohybovalo první polovinu své dráhy rychlostí $30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, druhou polovinu rychlostí $50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Druhé auto, které vystartovalo současně s prvním, se pohybovalo po stejné dráze stálou rychlostí $40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Které z obou aut přijede do cíle dříve?

Řešení

$v_1 = 30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_\mathrm{p} = ?$

ÚLOHY

NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

Úloha 47

Síla 60 N uděluje tělesu zrychlení 0,8 m · s^{-2}. Jak velká síla udělí témuž tělesu zrychlení 2 m · s^{-2}?

Řešení

$F_1 = 60$ N, $a_1 = 0{,}8$ m · s^{-2}, $a_2 = 2$ m · s^{-2}; $F_2 = ?$

Síla F_2, která udělí tělesu zrychlení $a_2 = 2$ m · s^{-2}, je podle druhého pohybového zákona určena vztahem $F_2 = ma_2$. Poněvadž $m = F_1/a_1$, dostaneme po dosazení

$$F_2 = \frac{a_2}{a_1}F_1.$$

$$\text{Číselně} \quad F_2 = \frac{2}{0{,}8} \cdot 60 \text{ N} = 150 \text{ N}.$$

Síla, která uděluje tělesu zrychlení 2 m · s^{-2}, má velikost 150 N.

Úloha 48

Těleso o hmotnosti 200 g, které bylo na začátku v klidu, působením stálé síly dosáhlo na konci šesté sekundy rychlosti o velikosti 3 m · s^{-1}. Určete velikost síly působící na těleso.

Řešení

$m = 0{,}2$ kg, $t = 6$ s, $v = 3$ m · s^{-1}; $F = ?$

Těleso se působením stálé síly začne pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = v/t$. Z druhého pohybového zákona pak dostáváme

$$F = ma = m\frac{v}{t}.$$

$$\text{Číselně} \quad F = 0{,}2 \cdot \frac{3}{6} \text{ N} = 0{,}1 \text{ N}.$$

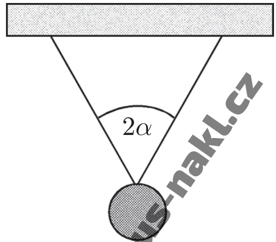
Na těleso působila síla o velikosti 0,1 N.

Úloha 49

Na těleso o hmotnosti 0,2 kg, které je na začátku v klidu, začne působit stálá síla 0,1 N. Jakou rychlost získá těleso za 6 s od začátku pohybu a jakou dráhu při tom urazí?

Úloha 60

Těleso o hmotnosti 1 kg je připevněno k horizontálně umístěné tyči dvěma vlákny svírajícími úhel 60° (obr. 28a). Těleso i s tyčí je na začátku v klidu. Jaká bude tahová síla každého vlákna, jestliže tyč začneme táhnout svisle vzhůru se zrychlením $5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$? Tíhové zrychlení je $9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Obr. 28a

Řešení

$m = 1\ \mathrm{kg}$, $\alpha = 30°$, $a = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F = ?$

Na těleso působí tři síly (obr. 28b): tahové síly vláken $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ a tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$. Výslednice těchto sil uděluje tělesu o hmotnosti m zrychlení $\boldsymbol{a}$. Podle druhého pohybového zákona proto platí

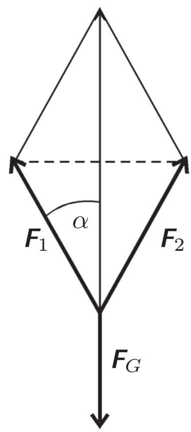
$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}.$$

Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ má podle obr. 28b velikost $2F\cos\alpha$, kde $F = |\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2|$ je velikost tahových sil obou vláken. Výslednice všech tří sil má velikost $2F\cos\alpha - mg$. Z druhého pohybového zákona pak dostáváme

$$2F\cos\alpha - mg = ma, \quad \text{odtud} \quad F = \frac{m(a+g)}{2\cos\alpha}.$$

$$\text{Číselně} \quad F = \frac{1(5+9{,}81)}{2\cos 30°}\ \mathrm{N} \doteq 8{,}6\ \mathrm{N}.$$

Velikost tahové síly každého vlákna je 8,6 N.



Obr. 28b

✎ *Poznámka*

Jestliže dosadíme do obecného řešení $a = 0$ (tyč je v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu) a $\alpha = 0$ (těleso je zavěšeno na dvou rovnoběžných vláknech), dostaneme $F = \frac{1}{2}mg$. To je však samozřejmé, neboť je-li těleso, které je v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, zavěšeno na dvou rovnoběžných vláknech, je každé z nich namáháno silou, která se rovná polovině tíhy tělesa.

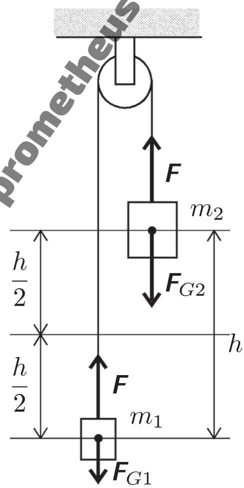
Úloha 61

Mezi dvěma nepohybujícími se loďkami, které jsou na hladině jezera, je nataženo lano. Člověk, který je na první loďce, táhne lano stálou silou 50 N po dobu 5 s. Určete velikost rychlostí, které budou mít obě loďky za pohybový zákon proto nelze aplikovat na celou soustavu o hmotnosti $m_1 + m_2$, ale jen na jednotlivá tělesa.

2. Jestliže do obecných řešení (b) a (c) dosadíme $m_1 = 0$, dostaneme $a = g$ (těleso o hmotnosti m_2 padá volným pádem) a $F = 0$ (vlákno není napnuto). Dosadíme-li do obou obecných řešení $m_2 = 0$, dostaneme $a = 0$ (první těleso je v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu) a $F = 0$ (vlákno opět není napnuto).

Úloha 64

Na pevné kladce visí dvě tělesa s hmotnostmi 3 kg a 6,8 kg (obr. 32). Těleso o menší hmotnosti se nachází ve vzdálenosti 2 m pod tělesem o větší hmotnosti. Za jakou dobu budou obě tělesa ve stejné výšce? Počáteční rychlost obou těles je nulová, tíhové zrychlení je 10 m · s^{-2}. Hmotnost kladky neuvažujeme.



Obr. 32

Řešení

$m_1 = 3$ kg, $m_2 = 6{,}8$ kg, $h = 2$ m, $g = 10$ m · s^{-2};
$t = ?$

Velikost zrychlení obou těles vypočteme z druhého pohybového zákona, který aplikujeme postupně na obě tělesa:

$$F - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - F = m_2 a$$

Sečtením levých a pravých stran obou rovnic dostaneme

$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a, \quad \text{odtud} \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Obě tělesa konají rovnoměrně zrychlený pohyb a do jejich vzájemného setkání urazí dráhu $\frac{h}{2}$. Platí proto $\frac{h}{2} = \frac{1}{2} a t^2$ a odtud $t = \sqrt{h/a}$. Po dosazení za velikost zrychlení a dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{h}{g} \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}}.$$

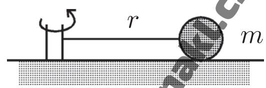
$$\text{Číselně} \quad t = \sqrt{\frac{2}{10} \cdot \frac{3 + 6{,}8}{6{,}8 - 3}} \text{ s} \doteq 0{,}7 \text{ s}.$$

Obě tělesa se setkají za 0,7 s.

DYNAMIKA ROVNOMĚRNÉHO POHYBU PO KRUŽNICI

Úloha 84

Těleso o hmotnosti 1 kg, které je upevněno na vlákně o délce 1 m, se otáčí ve vodorovné rovině (obr. 46). Při které minimální frekvenci se vlákno přetrhne, jestliže jeho pevnost v tahu je 100 N?



Obr. 46

Řešení

$m = 1$ kg, $r = 1$ m, $F_p = 100$ N; $f_m = ?$

V inerciální vztažné soustavě spojené se zemí působí na rotující těleso tahová síla vlákna $\boldsymbol{F}$, která je zároveň dostředivou silou (obr. 47). Tato síla uděluje tělesu o hmotnosti m dostředivé zrychlení $a = r\omega^2 = r(2\pi f)^2 = 4\pi^2 r f^2$. Podle druhého pohybového zákona platí $F = ma = 4\pi^2 m r f^2$. Z tohoto zákona vyplývá, že s rostoucí frekvencí f se tahová síla vlákna $\boldsymbol{F}$ zvětšuje a při určité frekvenci f_m se rovná pevnosti vlákna $\boldsymbol{F}_p$; při této frekvenci se vlákno přetrhne. Platí tedy

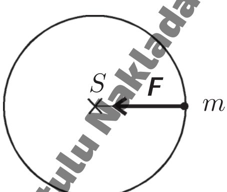
$$F_p = 4\pi^2 m r f_m^2, \quad \text{odtud} \quad f_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_p}{mr}}.$$

Jednotková zkouška

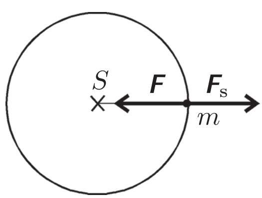
$$[\,f_m\,] = \sqrt{\frac{\text{N}}{\text{kg}\cdot\text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{kg}\cdot\text{m}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Číselně} \quad f_m = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{100}{1\cdot 1}}\ \text{s}^{-1} \doteq 1{,}6\ \text{s}^{-1}.$$

Minimální frekvence, při které se vlákno přetrhne, je 1,6 Hz.



Obr. 47



Obr. 48

✎ *Poznámka*

Úlohu můžeme řešit také v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotujícím tělesem (obr. 48). V této soustavě působí na těleso kromě tahové síly vlákna $\boldsymbol{F}$ ještě setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_s$ o velikosti $F_s = mr\omega^2 = 4\pi^2 m r f^2$, která směruje od osy otáčení. Obě

POHYBY TĚLES V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

Úloha 121

Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete jeho rychlost za 2 s a výšku, ve které se bude v této době nacházet. Jaká je největší výška, kterou těleso při tomto vrhu dosáhne, a za jakou dobu do této výšky vystoupí? Tíhové zrychlení je $10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení

$v_0 = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $t = 2\ \mathrm{s}$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $v = ?$, $h = ?$, $h_\mathrm{m} = ?$, $t_\mathrm{m} = ?$

Těleso za 2 s bude mít rychlost

$$v = v_0 - gt$$

a bude se nacházet ve výšce

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Číselně $$v = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} - 10\cdot 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$h = 60\cdot 2\ \mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{m}.$$

Pro výšku vrhu h_m a dobu výstupu t_m platí

$$h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2g}, \qquad t_\mathrm{m} = \frac{v_0}{g}.$$

Číselně $$h_\mathrm{m} = \frac{60^2}{2\cdot 10}\ \mathrm{m} = 180\ \mathrm{m}, \qquad t_\mathrm{m} = \frac{60}{10}\ \mathrm{s} = 6\ \mathrm{s}.$$

Po 2 s pohybu bude mít těleso rychlost $40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a vystoupí při tom do výšky 100 m. Výška vrhu je 180 m a doba výstupu 6 s.

Úloha 122

Dvě tělesa byla vržena svisle vzhůru různými počátečními rychlostmi; přitom první těleso dosáhlo čtyřikrát větší výšky výstupu než druhé. Vypočítejte, kolikrát je počáteční rychlost prvního tělesa větší než druhého.

Řešení

$h_{\mathrm{m}1} = 4h_{\mathrm{m}2}$; $v_{01}/v_{02} = ?$

Pro výšky vrhu obou těles platí $h_{\mathrm{m}1} = v_{01}^2/2g$ a $h_{\mathrm{m}2} = v_{02}^2/2g$. Z rovnice $h_{m1} = 4h_{m2}$ pak dostáváme

1.5 MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

MOMENT SÍLY. SKLÁDÁNÍ A ROZKLAD SIL

Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar ani objem se působením libovolně velkých sil nemění.

Otáčivý účinek síly na tuhé těleso vyjadřuje *moment síly* $\boldsymbol{M}$. Moment síly vzhledem k ose má velikost

$$M = Fd,$$

kde F je velikost působící síly a d rameno síly (tj. kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení). Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektor, který leží v ose otáčení a jehož směr je určen pravidlem pravé ruky.

Jestliže na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy působí současně několik sil, je výsledný moment síly dán vektorovým součtem momentů všech působících sil vzhledem k dané ose otáčení:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n$$

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se ruší, je-li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení nulový, tj.

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{0}.$$

Tato věta se nazývá *momentová věta.*

Při *skládání sil* nahrazujeme dvě nebo více sil (složky) jedinou silou (výslednicí), která má na těleso stejný pohybový účinek jako skládané síly. Při *rozkládání síly* na složky nahrazujeme danou sílu dvěma nebo více silami, které mají na těleso stejný pohybový účinek jako daná síla.

Různoběžné síly působící ve stejném bodě skládáme pomocí vektorového rovnoběžníku sil.
Pro *skládání rovnoběžných sil stejného směru* platí rovnice

$$F = F_1 + F_2, \qquad F_1 d_1 = F_2 d_2,$$

kde F_1 a F_2 jsou velikosti dvou rovnoběžných sil působících na tuhé těleso a d_1 a d_2 ramena těchto sil.
Pro *skládání rovnoběžných sil opačného směru* platí rovnice

$$F = F_1 - F_2, \qquad F_1 d_1 = F_2 d_2,$$

kde $F_1 > F_2$.

a nakonec

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{t}}} - 1 - \frac{F_0}{mg}\right)H. \qquad \text{(b)}$$

$$\text{Číselně} \quad h_1 = \left(\frac{1\,000}{200} - 1 - \frac{3{,}5}{0{,}1 \cdot 10}\right)1\ \mathrm{m} = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$

Korkové těleso, na které působí proti směru jeho pohybu ve vodě stálá odporová síla, vyskočí za daných předpokladů nad povrch vody do výšky 0,5 m.

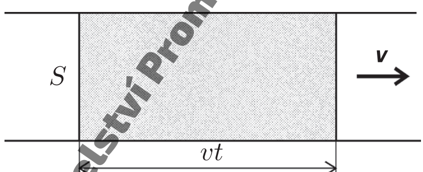
✎ *Poznámky*

1. Korková zátka, která vyskočí nad povrch vody, strhává s sebou také větší množství vody, a proto skutečná výška, do které zátka vyskočí, je ještě menší.
2. Všimněte si, že dosadíme-li do vztahu (b) za $F_{\mathrm{o}} = 0$, dostaneme vztah (a) z předcházející úlohy.

HYDRODYNAMIKA

Úloha 181

Jaký je objemový průtok vody v trubici o průměru 20 cm při rychlosti proudu 0,2 m · s^{-1} (viz obr. 111)?



Obr. 111

Řešení

$r = 10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$; $v = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $Q_V = ?$

Objemový průtok vody je určen vztahem

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{Svt}{t} = Sv = \pi r^2 v.$$

$$\text{Číselně} \quad Q_V = 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} \doteq 6{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}.$$

Objemový průtok vody je $6{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$. To znamená, že za každou sekundu proteče průřezem trubice 6,3 l vody.