

OBSAH

Předmluva	6
Stručný přehled použité symboliky	8
1 Proměnná, výroky, množiny	11
2 Dělitelnost přirozených čísel	14
3 Číselné obory	16
4 Algebraické výrazy	19
5 Algebraické rovnice s jednou neznámou	23
6 Algebraické nerovnice s jednou neznámou	26
7 Soustavy rovnic a nerovnic s více neznámými	30
8 Geometrické útvary v rovině	33
9 Shodná zobrazení v rovině	45
10 Podobnost a stejnoolehlost	50
11 Základní poznatky o funkcích	55
12 Racionální funkce	61
13 Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice	69
14 Goniometrie a trigonometrie	74
15 Základy geometrie v prostoru	79
16 Kombinatorika	84
17 Posloupnosti a řady	88
18 Vektorová algebra	93
19 Analytická geometrie lineárních útvarů	98
20 Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině	106
21 Pravděpodobnost	112
22 Statistika	118
23 Derivace funkce	123
24 Integrál	132
25 Komplexní čísla	139
Výsledky úloh	144

5.3 Upravte:

a) $(5 - \sqrt{2})^2 + 5\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})$

b) $\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{18}{3 - \sqrt{3}}$

d) $(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$

e) $3 \cdot \sqrt{45} - \sqrt{20} - 2\sqrt{80}$

f) $5\sqrt{27} - 2\sqrt{8} - \sqrt{12} + \sqrt{32}$

g) $0,2^{-3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} + \left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$

h) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{-2}$

5.4 Vypočtěte:

a) $3 \cdot |2 - 3,5| + 1 - |-0,3 + \frac{2}{5}|$

b) $|\sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$

c) $|3 - |6 - 10||$

4 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Dovednosti

1. Na konkrétních příkladech mnohočlenů s jednou proměnnou umět aplikovat pojmy: člen, koeficient, stupeň mnohočlenu; u kvadratického trojčlenu umět jednotlivé členy pojmenovat.
2. Umět mnohočleny sčítat, odčítat, násobit a v jednodušších případech i dělit.
3. Ovládat z paměti vzorce pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu a umět je používat.
4. Umět rozkládat mnohočleny v součin činitelů vytýkáním nebo užitím vzorců pro $A^2 - B^2$, $(A \pm B)^2$, $A^3 \pm B^3$.

5. Umět z paměti rozkládat v součin lineárních dvojklenů jednoduché kvadratické trojkleny.
6. Ovládat početní operace s racionálními lomenými výrazy a určování jejich definičních oborů. Vědět, že při úpravách racionálních lomených výrazů je nutnou součástí řešení úloh určení podmínek, za nichž mají provedené úpravy smysl.

Úlohy

1.1 Jsou dány mnohočleny:

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 2, \quad Q(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 6, \quad R(x) = 5 - 4x^4$$

- a) Určete jejich stupně.
- b) Vyjmenujte členy mnohočlenu $Q(x)$.
- c) Určete kvadratický člen mnohočlenu $P(x)$, lineární člen mnohočlenu $Q(x)$, absolutní člen mnohočlenu $R(x)$.
- d) Určete koeficienty lineárních členů těchto mnohočlenů.
- e) Vypočítejte $P(3)$, $Q(-1)$, $R(0)$.

2.1 Upravte:

- a) $0,7b^2c - \frac{1}{2}bc - 1,3bc^2 + 0,5bc + 0,3bc^2 - 0,75b^2c$
- b) $n^2 - [9n - 5n^2 + 6 - (n + 8n^2) + 10n - 4]$
- c) $(2a^2 - 3b - 1)(-4ab)$
- d) $(2x^2 - 3x + 4)(x + 5)$
- e) $(2x^2yz^3 - 2,4x^3y^2z + 0,6x^2yz^2) : 0,6x^2yz$

2.2 Upravte:

- a) $(27x^3 - 8) : (3x - 2)$
- b) $(4x^2 + 7x - 15) : (x + 3)$
- c) $(2x^3 + 3x) : (x - 7)$
- d) $(5a^2 - 11a + 2) : (2 - a)$

3.1 Umocněte:

- a) $(2x + 7y)^2$
- b) $(5a - 6b^2)^2$
- c) $(0,2x - 0,5y)^2$

3.2 Umocněte:

- a) $(x + 2)^3$
- b) $(2a - b)^3$
- c) $(3x + 2y)^3$

- 7.4 Jsou dány kružnice $k(S; r)$, $k'(S'; r')$, $|SS'| < r + r'$. Jedním jejich společným bodem M vedte úsečku AB tak, aby $A \in k$, $B \in k'$ a $|AM| = |BM|$.
- 7.5 Je dána přímka p a uvnitř jedné z polorovin s hraniční přímkou p dva různé body R, S tak, že $\leftrightarrow RS$ není kolmá k p . Sestrojte trojúhelník RST s vrcholem $T \in p$, aby měl co nejmenší možný obvod.
- 7.6 Je dána přímka p a body A, B , které leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p , přičemž přímka AB není kolmá k p . Sestrojte na přímce p bod V tak, aby přímka p byla osou úhlu AVB .
- 7.7 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno c, t_a, α .
- 7.8 Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a bod $A \in a$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby měl výcholy postupně na rovnoběžkách a, b, c .
- 7.9 Jsou dány různoběžné přímky b, d a uvnitř jejich ostrého úhlu bod A . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in b, D \in d$.
- 7.10 Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány jeho těžnice t_a, t_b, t_c .

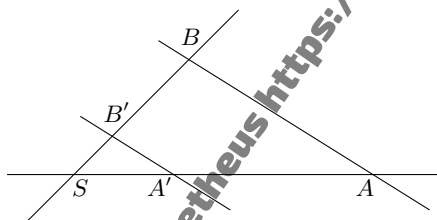
10 PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

Dovednosti

1. Aktivně ovládat věty o podobnosti trojúhelníků. Znat vztahy mezi odpovídajícími si velikostmi úhlů a délkami stran podobných útvarů.
2. Umět využít podobných trojúhelníků při dělení úsečky v daném poměru a na n shodných dílů.
3. Aktivně ovládat Pythagorovu větu a Euklidovy věty.
4. Znat definici stejnolehlosti a umět v dané stejnolehlosti zobrazit bod, přímku, kružnici a další jednoduché útvary. Umět určit středy stejnolehlosti dvou kružnic.
5. Umět využít stejnolehlosti při řešení jednoduchých konstrukčních úloh.

Úlohy

- 1.1 K danému útvaru sestrojte útvar podobný, je-li poměr podobnosti k :
- trojúhelník ABC , $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $k = \frac{3}{2}$
 - obdélník $ABCD$, $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $k = \frac{2}{3}$
 - kružnice $k(S; r)$, $r = 3$ cm, $k = 2$
- 1.2 Vypočítejte výšku stromu, jehož stín má délku 32 m, jestliže svislá tyč délky 1,5 m vrhá za stejných podmínek stín délky 2,4 m.
- 1.3 V situaci na obr. 10.1 byly změřeny vzdálenosti $|SB| = 180$ m, $|SB'| = 60$ m, $|A'B'| = 80$ m, $A'B' \parallel AB$. Určete vzdálenost bodů A, B .



Obr. 10.1

- 1.4 V trojúhelníku ABC jsou body P, Q, R po řadě středy stran AB, BC, AC . Ukažte, že trojúhelník PQR je podobný trojúhelníku ABC , a vypočítejte jeho obsah, je-li obsah trojúhelníku ABC roven S_{ABC} .
- 1.5 Bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice $k(S; r)$. Dvě sečny jím vedené protnou kružnici k ve dvojicích bodů A, B a C, D . Dokažte, že platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.
- 2.1 Rozdělte danou úsečku na tři díly v poměru:
- $2 : 3 : 1$
 - $3 : 5 : 1$
 - $2 : 3 : 2$
 - $3 : \sqrt{2} : 2$
- 2.2 Rozdělte danou úsečku na n shodných dílů, je-li:
- $n = 3$
 - $n = 5$
 - $n = 6$
- 2.3 Rozdělte danou úsečku na tři díly, z nichž (jako stran) lze sestrojit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

8.1 Vypočtete:

a) $4^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{2}{3}}$, $32^{1,4}$, $27^{-\frac{2}{3}}$, $(\frac{81}{16})^{-\frac{3}{4}}$, $(\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$

b) $\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{7}{6}}}$ c) $(4^{\frac{3}{4}})^2$ d) $(9^{-2})^{\frac{1}{4}}$

8.2 Upravte:

a) $(a^{-\frac{5}{6}})^{-\frac{12}{5}}$

b) $\frac{(a^2 \cdot b^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(b \cdot a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}$

8.3 Upravte převedením na mocniny s racionálním mocnitelem:

a) $\frac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}}{a^{-2} \cdot \sqrt[6]{a^5}}$

b) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{b^3}}}{\sqrt{ab}}$

8.4 Řešte úlohu 7.6 b)–f) převedením na mocniny s racionálním exponentem.

8.5 Upravte:

a) $\frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4 \cdot a^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{a^{-\frac{1}{2}}}$

b) $\frac{\sqrt{y^{-\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt{y^{\frac{4}{3}}} \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{a \cdot y}}$

13 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE A ROVNICE

Dovednosti

1. Znáť definici exponenciální funkce, umět pomoci vhodných bodů pro daný základ načrtnout její graf a popsat její základní vlastnosti, chápat souvislost hodnoty základu s průběhem funkce.

Umět načrtnout graf a popsat vlastnosti funkcí, jejichž grafy vzniknou z grafu exponenciální funkce jednoduchým posunutím.

2. Umět aplikovat metodu převedení na společný základ při řešení základních exponenciálních rovnic typu $a^x = b$ a rovnic, které lze na ně převést početní úpravou nebo jednoduchou substitucí.
Umět vyřešit i základní exponenciální nerovnice typu $a^x > b$, $a^x < b$.
3. Chápat funkce $y = a^x$ a $y = \log_a x$ jako funkce navzájem inverzní. Ovládat definici logaritmu a umět ji aplikovat.
Umět pomocí vhodných bodů pro daný základ načrtnout graf logaritmické funkce a popsat její vlastnosti; chápat, jak souvisí hodnota základu s průběhem funkce.
Umět využít grafu logaritmické funkce při řešení základních logaritmických rovnic typu $\log_a x > b$, $\log_a x < b$.
Umět načrtnout grafy a popsat vlastnosti funkcí typu $y - n = \log_a x$ a $y = \log_a(x - m)$.
Ovládat pravidla pro logaritmování součinu, podílu a mocniny a umět je aplikovat při logaritmování a odlogaritmování výrazů.
4. Umět využít předcházející dovednosti při řešení jednodušších typů exponenciálních a logaritmických rovnic.

Úlohy

- 1.1 a) Pro každou z funkcí $f: y = 2^x$, $g: y = 3^x$, $h: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ určete funkční hodnoty pro $x \in \{0, 1, 2, -1, -2\}$.
b) Načrtněte grafy funkcí z a) v téže soustavě souřadnic a porovnejte jejich vlastnosti.
- 1.2 Daná čísla porovnejte s číslem 1:
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$, $(2,36)^0$, $0,8^{-\frac{2}{3}}$
- 1.3 Co lze říci o číslech m , n , platí-li:
a) $\left(\frac{3}{4}\right)^m < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ b) $2,5^m < 2,5^n$ c) $0,7^m > 0,7^n$
- 1.4 Který ze vztahů $0 < a < 1$, $a > 1$ platí, je-li:
a) $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{4}{5}}$ b) $a^{\frac{2}{7}} > a^{\frac{5}{7}}$ c) $a^{-\frac{7}{8}} > a^{\frac{9}{8}}$
- 1.5 Načrtněte graf a popište vlastnosti funkce:
a) $f: y = 2^x - 2$ b) $f: y = 2^{x+1}$
c) $f: y = 0,5^x + 1$ d) $f: y = 0,5^{x-2}$

8.4 Pravděpodobnost, že se poškodí televizor při dopravě, je 0,1. Vypočítejte pravděpodobnost, že se v zásilce pěti televizorů při dopravě:

- a) žádný nepoškodil b) aspoň jeden poškodil

8.5 Jaká je pravděpodobnost, že při pětinasobném hodu kostkou padne aspoň jednou šestka?

22 STATISTIKA

Dovednosti

1. Správně chápat pojmy statistický soubor, statistická jednotka, statistický znak, absolutní a relativní četnost znaku. Rozumět vztahům:

$$\sum_{j=1}^k n_j = n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

kde n_j jsou četnosti pro určitý znak a n je rozsah souboru,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = 1,$$

kde $\frac{n_j}{n}$ jsou relativní četnosti znaku.

Umět graficky znázornit rozdělení četností spojnicovým diagramem, sloupkovým diagramem a kruhovým diagramem.

2. Aktivně ovládat pojem aritmetický průměr. Umět vypočítat aritmetický průměr ze vztahů:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j x_j, \quad \text{kde} \quad \sum_{j=1}^k n_j = n$$

3. Chápat pojem vážený průměr a umět jej použít pro výpočet celkového průměru z průměrů dílčích. Umět využít vážený průměr při řešení úloh o směsích s využitím vztahů:

$$mc = \sum_{i=1}^r m_i c_i, \quad m = \sum_{i=1}^r m_i,$$

kde m udává celkovou hmotnost dané soustavy a c charakteristickou vlastnost, jako je např. cena, teplota, koncentrace apod.

4. Rozumět vzorcům pro výpočet směrodatné odchylky

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

a umět určit tuto odchylku i s využitím statistických funkcí na kalkulačce.

Úlohy

- 1.1 Při zjišťování věku posluchačů jedné studijní skupiny na vysoké škole byly zjištěny tyto hodnoty: 18, 19, 18, 18, 19, 18, 20, 21, 20, 21, 22, 22, 18, 18, 18, 19, 19, 18, 19, 20. Určete rozsah souboru, sestavte tabulku rozdělení četností jednotlivých hodnot znaku „věk“ a určete relativní četnost pro hodnotu 18. Sestrojte odpovídající spojnicový diagram (tzv. polygon četností) rozdělení četností.
- 1.2 Ve třídě s 25 žáky prospělo s vyznamenáním 7 žáků, prospělo 14 žáků, neprospěli 3 žáci, nebyl klasifikován 1 žák. Vypočtete relativní četnosti znaku „prospěch“ a ukažte, že jejich součet je roven jedné. Sestrojte sloupcový diagram (tzv. histogram) rozdělení četností.
- 1.3 V prodejně pánské obuvi zaznamenávali velikosti prodaných párů během dne s tímto výsledkem: 41, 41, 41, 42, 42, 41, 39, 41, 37, 41, 45, 41, 42, 38, 40, 39, 38, 41, 41, 38, 42, 39, 44, 43, 43, 44, 39, 39, 43, 43, 40, 42, 43, 41, 41, 43, 40, 40, 40, 42, 42, 42, 41, 40, 42. Určete rozsah souboru, vypočtete absolutní a relativní četnosti znaku „velikost“. Relativní četnosti vyjádřete také v procentech a ověřte, zda jejich součet činí 100 %. Sestrojte sloupcový diagram rozdělení četností.