Obsah

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Předmluva

Vážení čtenáři,

Přehled středoškolské matematiky, který se vám dostává do rukou, vychází již v 10. vydání. V 9. upraveném vydání byl upraven a doplněn text knihy, zdokonalena i její grafická podoba s použitím dvoubarevného tisku. Kniha obsahově i metodicky navazuje na učebnice matematiky pro gymnázia a střední odborné školy. Na rozdíl od těchto učebnic nesleduje však didaktický systém učiva s cyklickým řazením témat, ale podává ucelený přehled jednotlivých oborů středoškolské matematiky i jejich vztahů. Při psaní knihy i úpravách jsem vycházel ze svých zkušeností z přípravných kurzů pro vysokou školu, z výuky, z přijímacích i dalších zkoušek na VŠSE a ZČU v Plzni a též z poznatků získaných v matematické olympiádě ve funkci předsedy KV MO.

Pro zdůraznění základního učiva a zvýraznění přehlednosti je kniha rozdělena do těchto deseti oddílů:
1. Základní poznatky z logiky a teorie množin. 2. Číselné obory. 3. Základní poznatky z algebry. 4. Funkce. 5. Rovnice a nerovnice. 6. Posloupnosti a řady. 7. Kombinatorika, počet pravděpodobnosti, statistika. 8. Matematická analýza. 9. Geometrie (planimetrie a stereometrie). 10. Analytická geometrie.

Studium knihy lze doporučit jak studentům maturitních ročníků středních škol, tak i studentům prvních semestrů vysokých škol, zejména matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Optimální ovšem bude, když se student naučí s knihou pracovat již v průběhu svého středoškolského studia, nejlépe od 1. ročníku. Kniha může být užitečná i tomu, kdo učivo středoškolské matematiky v podstatě zná a chce se podívat třeba jen na některé úseky, které buď pozapomněl, nebo které se v době, kdy studoval, na střední škole neprobíraly. Takový čtenář najde při čtení kapitoly, která ho zajímá, i potřebné odkazy na to, co pro studium zvoleného tématu potřebuje znát z jiných kapitol. Ještě lepší pomůckou mu však bude rejstřík na konci knihy, podle něhož potřebné pojmy snadno vyhledá. Rejstřík bude samozřejmě užitečný i pro čtenáře, který bude studovat postupně celou knihu, neboť je v povaze matematiky, že spolu souvisí a prolínají se různé její disciplíny. Tradiční dělení na aritmetiku, algebru, matematickou analýzu, geometrii atd. nikterak neznamená, že tyto celky jsou samy v sobě uzavřené. Velmi významným rysem změn ve vyučování matematice v současné době je široké uplatnění moderní výpočetní techniky, kalkulátorů a počítačů. Informatika, počítače a programování se nyní studují na středních školách v samostatných předmětech a jejich náplň přesahuje rámec této knihy. Do ní jsem zařadil především učivo povinné středoškolské matematiky; z nepovinné matematiky (cvičení) pouze některé důležité poznatky, které na ně bezprostředně navazují. Mou snahou je, aby Přehled byl vhodným předstupněm dalšího studia matematické literatury v průběhu středoškolského studia a na vysoké škole.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Poznámky k Archimedovu principu a k principu vložených intervalů.

1. Archimedův princip platí nejen v oboru R, ale také pro všechna čísla $a, b > 0$ v oboru Q. Naproti tomu princip vložených intervalů je charakteristický právě jen pro obor R.
2. Na principu vložených intervalů je založeno vyjadřování reálných čísel nekonečnými desetinnými rozvoji a početní operace s nimi (zajišťuje existenci a unicitu součtu a součinu). Je základem měření skalárních fyzikálních veličin.
3. Geometrická analogie Archimedova principu a principu vložených intervalů jsou též základem pro měření úseček a pro grafické znázorňování reálných čísel na přímce (věta V.X kap. 2.1).

Aproximace reálných čísel, zaokrouhlování, přibližné numerické výpočty

V matematice, ve fyzice i v praxi se velmi často setkáváme nejen s přesnými číselnými údaji, ale také s jejich **aproximacemi (přibližnými hodnotami)**. *Např.* číselné hodnoty veličin získané měřením nebo výsledky výpočtů užitím tabulek či výpočetní techniky jsou prakticky téměř vždy přibližné, zatížené jistou chybou (nepřesností). I v mnoha jiných situacích neznáme přesný číselný údaj, ale jen interval, do kterého uvažované reálné číslo patří.

Víme-li, že pro reálné číslo a platí

$$a \in \langle a_d, a_h \rangle \text{ neboli } a_d \leqq a \leqq a_h,$$

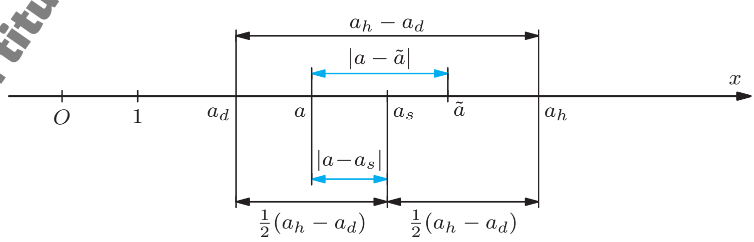
lze považovat kterékoli číslo $\tilde{a}$ z intervalu $\langle a_d, a_h \rangle$ za **aproximaci** čísla a; píšeme $a \approx \tilde{a}$. (Čteme a je přibližně rovno $\tilde{a}$). Speciálně číslo a_d se nazývá **dolní aproximace** čísla a, číslo a_h se nazývá **horní aproximace** čísla a, jejich aritmetickému průměru a_s se říká **střední aproximace** čísla a:

$$a_s = \frac{1}{2}(a_d + a_h)$$

Chybu (nepřesnost) $a - \tilde{a}$ aproximace $\tilde{a}$ čísla a zpravidla nedovedeme určit, můžeme však provést odhad její absolutní hodnoty $|a - \tilde{a}|$ pomocí čísla $\alpha > 0$, pro které platí

$$|a - \tilde{a}| \leqq \alpha.$$

Každé takové číslo α nazýváme **odhadem absolutní chyby (nepřesnosti)** nebo kratčeji **absolutní chybou (nepřesností) aproximace** $\tilde{a}$ čísla a. Aproximujeme-li číslo a kterýmkoli číslem $\tilde{a} \in \langle a_d, a_h \rangle$, zřejmě platí (obr. 2.6)



Obr. 2.6

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

Rozdílu $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ je přiřazen polohový vektor rovný $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + (-\boldsymbol{r}_2)$, kde $-\boldsymbol{r}_2$ je vektor opačný k polohovému vektoru $\boldsymbol{r}_2$. Na základě toho je v obr. 2.9 sestrojen obraz rozdílu komplexních čísel $z_1 - z_2$ jako koncový bod vektoru $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + (-\boldsymbol{r}_2)$.

Geometrické znázornění součinu a podílu nenulových komplexních čísel je založeno na jejich goniometrickém tvaru, jak ukážeme v kap. 4.6.

Definice absolutní hodnoty komplexního čísla a její vlastnosti

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = x + y\mathrm{i}$, označovaná symbolem $|z|$, je reálné číslo *definované* vztahem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ čili } |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \text{ kde } \overline{z} = x - y\mathrm{i}.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty komplexního čísla:

V Gaussově rovině představuje $|z|$ vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku (obr. 2.7).

Věty o vlastnostech absolutních hodnot komplexních čísel

a) Pro každé číslo $z \in \mathsf{C}$ platí
$|z| \geqq 0$, přičemž $|z| = 0$, právě když $z = 0$,
$|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

b) Pro každou dvojici čísel $z_1, z_2 \in \mathsf{C}$ platí
$|z_1| - |z_2| \leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ (**trojúhelníková nerovnost**),
$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, je-li $z_2 \neq 0$.

Geometrický význam absolutních hodnot komplexních čísel v trojúhelníkové nerovnosti: Absolutní hodnoty $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 - z_2|$ jsou v Gaussově rovině rovny vzdálenostem obrazů komplexních čísel z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ od počátku (obr. 2.9). Dále lze dokázat *větu*:

Absolutní hodnota $|z_1 - z_2|$ rozdílu komplexních čísel z_1, z_2 je rovna vzdálenosti obrazu komplexního čísla z_1 od obrazu komplexního čísla z_2 (obr. 2.9).

Příklady výpočtu absolutní hodnoty komplexního čísla

Určete absolutní hodnoty komplexních čísel

a) $5 + 4\mathrm{i}$, b) $\dfrac{56 - 33\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}}$.

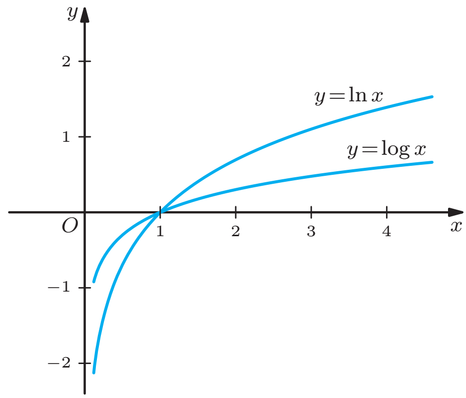
Řešení

a) $|5 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

b) $\left|\dfrac{56 - 33\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|56 - 33\mathrm{i}|}{|5 + 12\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{3\,136 + 1\,089}}{\sqrt{25 + 144}} = \dfrac{\sqrt{4\,225}}{\sqrt{169}} = \dfrac{65}{13} = 5$

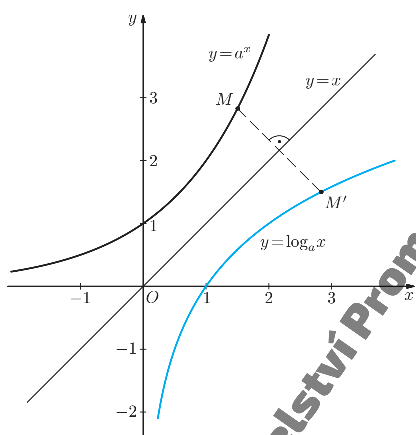
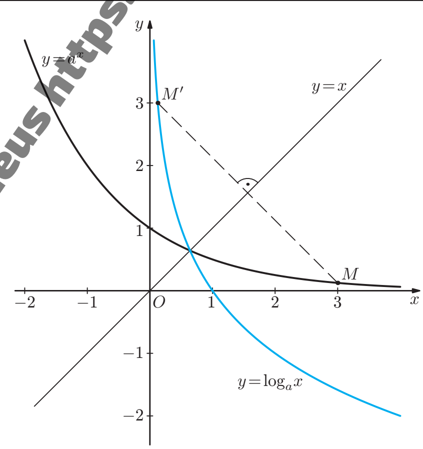
(tento postup je jednodušší než vypočítat nejprve podíl a pak jeho absolutní hodnotu).

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz



Obr. 4.20

Vlastnosti logaritmických funkcí $f\colon y = \log_a x$ Tab. 4.8

$a > 1$	$0 < a < 1$
 $\mathsf{D}(f) = (0, +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ $f(1) = \log_a 1 = 0$ Není ani zdola omezená, ani shora omezená Je rostoucí, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.	 $\mathsf{D}(f) = (0, +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ $f(1) = \log_a 1 = 0$ Není ani zdola omezená, ani shora omezená Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.

Poznámka. Lze dokázat (užitím matematické analýzy), že obecně mají grafy funkcí $f\colon y = a^x$ a $g\colon y = \log_a x$ tyto počty průsečíků:

a) pro $a > 1$ buď žádný průsečík, je-li $a > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ (např. pro $a = 2$, $a = \mathrm{e}$), nebo 1 průsečík, je-li $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, anebo 2 průsečíky, je-li $1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$,

b) pro $0 < a < 1$ buď 1 průsečík, je-li $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} < a < 1$ (např. pro $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$), nebo 2 průsečíky, je-li $a = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$, anebo 3 průsečíky, je-li $0 < a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ (např. pro $a = \frac{1}{16}$, $a = \frac{1}{64}$).

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

5.10 Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme každou nerovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c < 0,$$

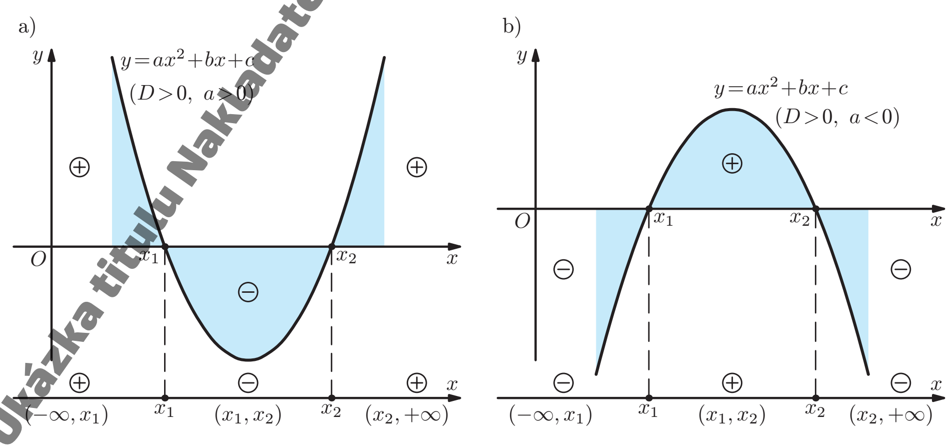
kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. O kvadratické nerovnici se mluví také v případě, že má tvar

$$ax^2 + bx + c \geqq 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c \leqq 0.$$

Řešení kvadratických nerovnic uvedených typů se provádí v oboru R takto:

Označme $D = b^2 - 4ac$ diskriminant příslušné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + {} + c = 0$ (kap. 5.3).

I. Je-li $D > 0$, pak tato kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny x_1, x_2 a kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit v součin kořenových činitelů $a(x - x_1)(x - x_2)$. Po vydělení obou stran dané nerovnice číslem a neboli vynásobením obou jejích stran číslem $\dfrac{1}{a}$ (úprava (UN 4), resp. (UN 4a)) má levá strana získané kvadratické nerovnice tvar $(x - x_1)(x - x_2)$ a k jejímu řešení stačí užít věty o znaménku součinu dvou reálných čísel (kap. 2.1). Tento postup řešení lze výhodně zjednodušit pomocí **metody intervalů** (**metody nulových bodů**): Nechť je $x_1 < x_2$. Parabola, která je grafem kvadratické funkce $f\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, protíná osu x ve dvou různých bodech a z jejího průběhu (obr. 5.19a, b, 5.20a) vidíme, že pro funkční hodnoty funkce f v intervalech $\mathsf{I}_1 = (-\infty, x_1)$, $\mathsf{I}_2 = (x_1, x_2)$, $\mathsf{I}_3 = (x_2, +\infty)$ platí: V každé dvojici sousedních intervalů mají opačná znaménka. Stačí proto zjistit znaménko hodnoty kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ v kterémkoli bodě jednoho z intervalů I_1, I_2, I_3 (nejjednodušeji v bodě $x = 0$, pokud je $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$). Odkud pak již plynou znaménka hodnot tohoto trojčlenu ve všech ostatních bodech těchto intervalů, čímž je určeno řešení dané kvadratické nerovnice.



Obr. 5.19

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz

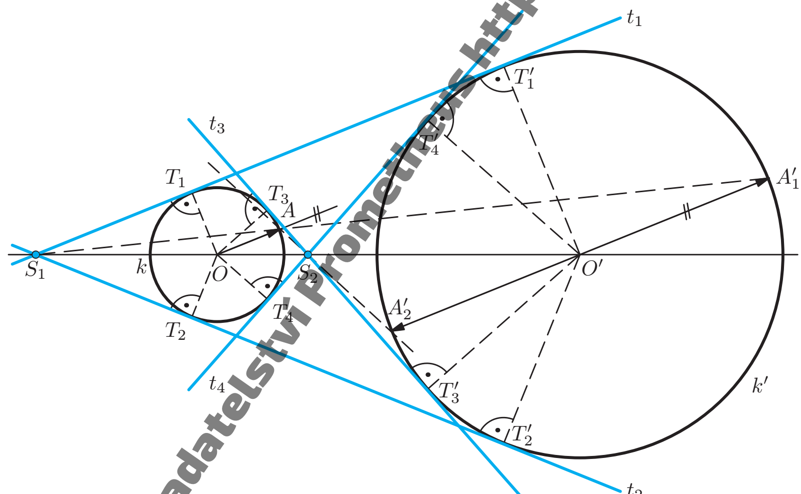
Zkouška: Z rozboru plyne, že sestrojený trojúhelník ABC splňuje všechny dané vlastnosti.

Diskuse: Pokud $\gamma < 180°$, jsou všechny části konstrukce jednoznačné, úloha má jediné řešení.

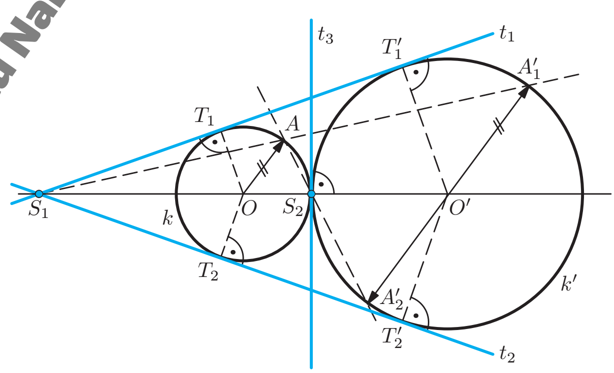
Při řešení dalších příkladů využijeme tyto důležité *věty o zobrazování kružnic ve stejnolehlých zobrazeních*:

V.1. Obrazem libovolné kružnice $k(O, r)$ v každé stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ se středem S a koeficientem stejnolehlosti κ je kružnice $k'(O', r')$, jejíž střed O' je obrazem středu O kružnice k v této stejnolehlosti a pro jejíž poloměr r' platí $r' = |\kappa| \cdot r$ (obr. 9.65, kap. 9.8).

V.2. Jsou-li dány libovolné dvě kružnice $k(O, r)$, $k'(O', r')$ s různými poloměry r, r', pak existují právě dvě stejnolehlosti $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ zobrazující kružnici k na kružnici k'. Středy S_1, S_2 těchto stejnolehlostí leží na přímce procházející body O, O' (obr. 9.86 až 9.88) a jejich koeficienty jsou po řadě čísla $\kappa_1 = \dfrac{r'}{r}$, $\kappa_2 = -\dfrac{r'}{r}$.

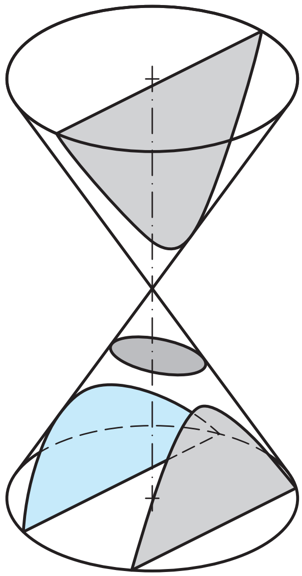


Obr. 9.86

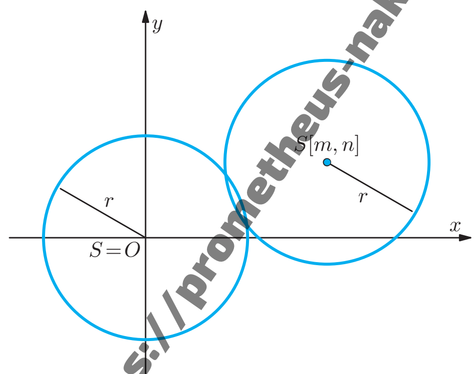


Obr. 9.87

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz



Obr. 10.65



Obr. 10.66

Kružnice a její rovnice

Definici **kružnice** jsme uvedli v kap. 9.3.

O **analytickém vyjádření kružnice** platí *věty*:

V.1. Kružnice k se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$ (obr. 10.66) má v kartézské soustavě souřadnic Oxy rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Rovnici (1) se říká **středový tvar rovnice kružnice** či **středová rovnice kružnice**.

Speciálně, má-li kružnice k střed S v počátku, tj. $S = O$ (obr. 10.66), pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1a)$$

V.2. Rovnice (1) kružnice k se dá upravit na tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathsf{R}. \qquad (2)$$

Rovnice (2) se nazývá **obecný tvar rovnice kružnice** nebo **obecná rovnice kružnice**.

Poznámka. *Obrácená věta* k větě V.2 však *neplatí*, každá rovnice tvaru (2) nemusí být rovnicí kružnice. Je jí právě tehdy, když se dá uvést na středový tvar (1), nutná a postačující podmínka pro to je $a^2 + b^2 > 4c$.

Ukázka titulu Nakladatelství Prometheus https://prometheus-nakl.cz