PŘEDMLUVA

Tato učebnice, která vás bude provázet matematikou v několika měsících školního roku, je věnována shrnutí a prohloubení pojmu funkce, goniometrii, trigonometrii a stereometrii.

Mnohé z toho, co je v učebnici uvedeno, již znáte. Pracovali jste už např. s funkcemi, určovali jste definiční obory funkcí a obory jejich hodnot. Na základní škole jste se seznámili s goniometrickými funkcemi a používali jste je při řešení pravoúhlého trojúhelníku. Ze základní školy už také znáte řadu věcí ze stereometrie.

V učebnici se seznámíte s řadou dalších typů úloh z okruhu učiva o funkcích, učiva goniometrie a stereometrie. Ukážeme si, jak lze získané poznatky užít při řešení jednoduchých aplikací z technické praxe i z běžného života.

V učebnici jsou zařazena cvičení, při jejichž řešení si budete moci ověřit, jak jste příslušné učivo zvládli a pochopili. Prohlubující učivo je označeno znaky ▼ a ▲, složitější úlohy ve cvičeních jsou vyznačeny křížkem u čísla úlohy.

Přejeme vám při práci s učebnicí mnoho zdaru.

Autoři

OBSAH

1 FUNKCE

1.1 Pojem funkce

Pojem funkce známe již z prvního ročníku, stačí si jej proto pouze připomenout. Začneme příkladem.

Příklad 1

Platí věta: *Pro každé přirozené číslo* $n \geqq 3$ *je počet všech úhlopříček konvexního* n*-úhelníku roven číslu* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Z této věty je vidět, že každému přirozenému číslu $n \geqq 3$ je jednoznačně přiřazeno číslo y, které udává počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku. Máme k dispozici určité **pravidlo**, pomocí něhož můžeme pro každé n z množiny N_3 všech přirozených čísel větších nebo rovných číslu 3 určit počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku:

Pro $n = 3$ je počet úhlopříček $y = 0$,
pro $n = 4$ je počet úhlopříček $y = 2$,
pro $n = 5$ je počet úhlopříček $y = 5$,
pro $n = 10$ je počet úhlopříček $y = 35$ atd.

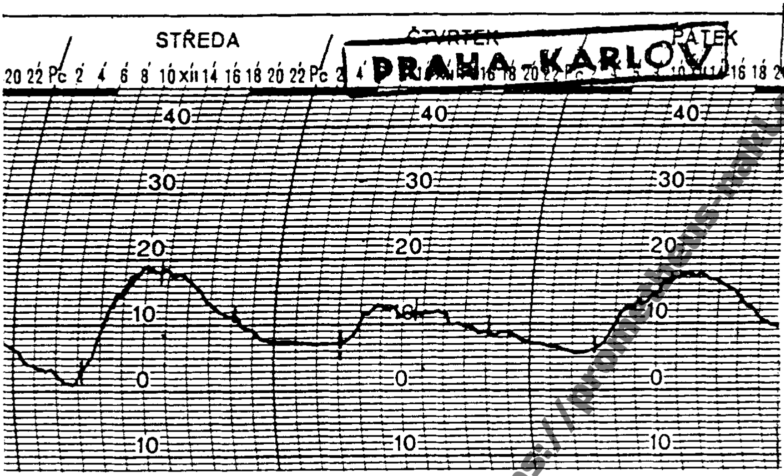
Pravidlo, kterým se zde zabýváme, je příkladem funkce; definičním oborem této funkce je množina N_3. Můžeme ji stručně zapsat takto:

$$y = \frac{n(n-3)}{2}\,,\ n \in \mathsf{N}_3$$

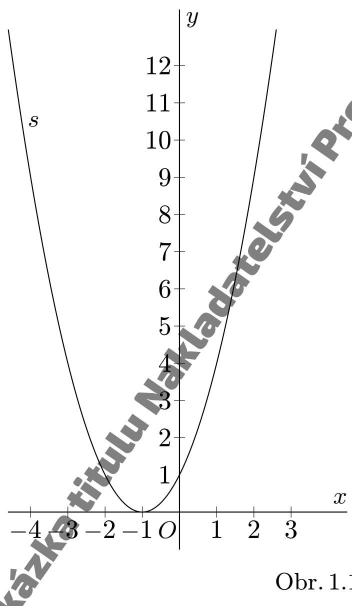
První část zápisu vyjadřuje předpis, pomocí kterého jsou reálným číslům jednoznačně přiřazována reálná čísla, druhá část zápisu udává definiční obor funkce.

Připomeňme si, že funkci můžeme definovat následujícím způsobem:

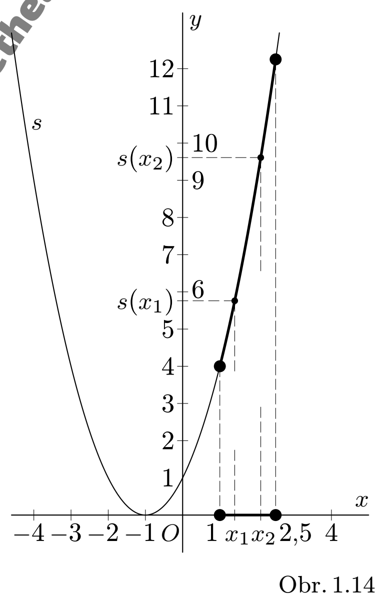
Funkce je pravidlo, pomocí kterého je každému reálnému číslu x **z množiny** A **přiřazeno právě jedno reálné číslo** y. Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.



Obr. 1.12



Obr. 1.13



Obr. 1.14 a

Cvičení

1. Vypočtěte:
a) $\log_2 3$ b) $\log_6 9$ c) $\log_4 11$ d) $\log_8 2$

2. Rentgenové paprsky o vlnové délce 0,01 μm procházejí hliníkovou vrstvou. Intenzitu záření v závislosti na tloušťce vrstvy lze vyjádřit vzorcem $I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Přitom I_0 je číselná hodnota počáteční intenzity, I číselná hodnota intenzity po průchodu vrstvou silnou x cm, α je číselná hodnota absorbčního koeficientu, pro hliník je rovna přibližně 5,4. Vypočtěte procentový úbytek I_0 po průchodu vrstvou 0,1 cm silnou. Určete tloušťku vrstvy potřebnou k tomu, aby bylo $I = 0{,}5 \cdot I_0$.

Historická poznámka

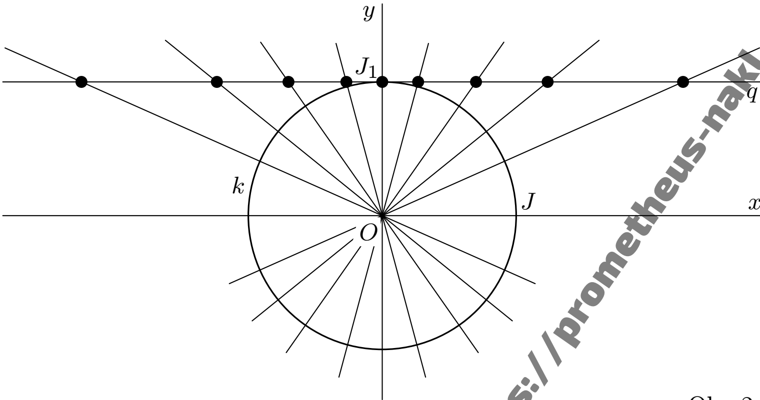
Objev logaritmů v 17. století byl podmíněn potřebami tehdejší společnosti. Bylo to období prudkého rozvoje věd, techniky, řemesel, obchodu, období velkých zeměpisných objevů. Pro zpracování v astronomii i v jiných vědách se stávala dosavadní výpočetní technika neúnosnou. Značné zjednodušení numerických výpočtů přinesly tabulky logaritmů spojené se jmény John Neper, Henry Briggs, Joost Bürgi.

Skotský matematik John Neper (1550 – 1617) vydal r. 1614 dílo Mirifici logaritmorum canonis descriptio (tj. Popsání podivuhodného zákona logaritmů). Tato kniha obsahuje tabulky logaritmů se základem o něco menším, než je převrácené číslo k číslu e.

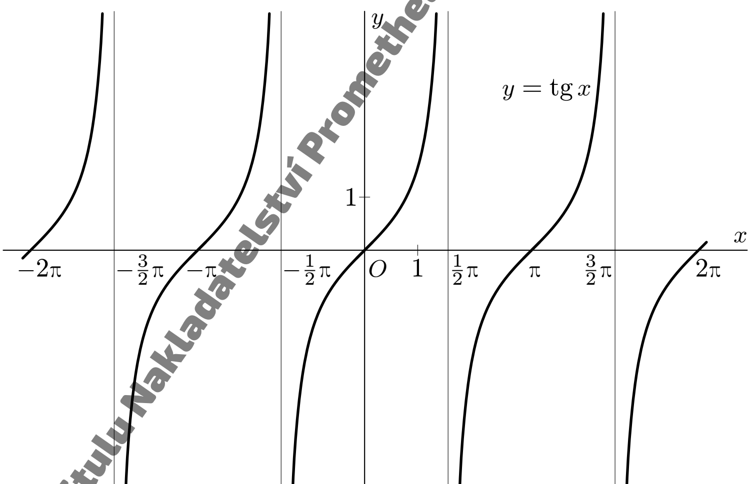
Neperův první pokus nebyl příliš obratný. Spolu s anglickým matematikem Henry Briggsem (1561 – 1631) se rozhodl vytvořit tabulky dekadických logaritmů. Briggs publikoval nejprve r. 1617 osmimístné tabulky logaritmů čísel od 1 do 1 000 a r. 1624 čtrnáctimístné tabulky logaritmů čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000.

Švýcarský mechanik a počtář Joost Bürgi (1552 – 1632), poslední ze jmenované trojice, žil v letech 1601 – 1631 v Praze. Na svých tabulkách pracoval celkem osm let; jejich základem je přibližně číslo e. Práce Bürgiho však zůstala téměř nepovšimnuta.

Objev logaritmů též bezprostředně vedl k sestrojení logaritmického pravítka, dříve velmi známé a rozšířené mechanické pomůcky pro numerické výpočty.



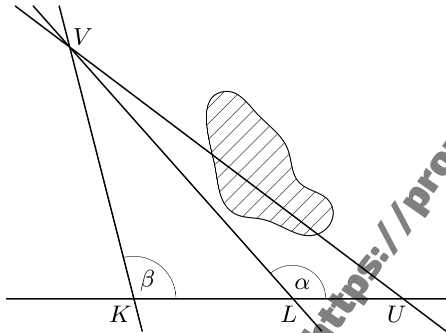
Obr. 2.20



Obr. 2.21

Příklad 29

Je třeba určit vzdálenost míst U a V, která jsou oddělena rybníkem. K tomuto účelu byla od místa U vytyčena přímá trasa se stanovišti K a L (viz obr. 2.55). Bylo naměřeno: $\alpha = 115°30'$, $\beta = 104°20'$; vzdálenost míst U, K je 110 metrů, vzdálenost míst K, L je 65 metrů.



Obr. 2.55

Řešení. Pomocí sinové věty nejprve určíme délku strany VL v trojúhelníku LKV a potom užitím kosinové věty vypočítáme délku strany UV v trojúhelníku LUV.

V trojúhelníku LKV je $|\sphericalangle KLV| = 180° - \alpha$ a $|\sphericalangle LVK| = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$. Podle sinové věty je:

$$\frac{|VL|}{\sin\beta} = \frac{|LK|}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$|VL| = |LK| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \left(65 \cdot \frac{\sin 104°20'}{\sin 11°10'}\right) \text{ m} \doteq 325\,\text{m}$$

V trojúhelníku VLU platí podle kosinové věty:

$$|VU|^2 = |VL|^2 + |LU|^2 - 2 \cdot |VL| \cdot |LU| \cdot \cos\alpha \doteq$$
$$\doteq \left(325^2 + 45^2 - 2 \cdot 325 \cdot 45 \cdot \cos 115°30'\right) \text{ m}^2 \doteq 120\,242\,\text{m}^2$$

$$|VU| \doteq 347\,\text{m}$$

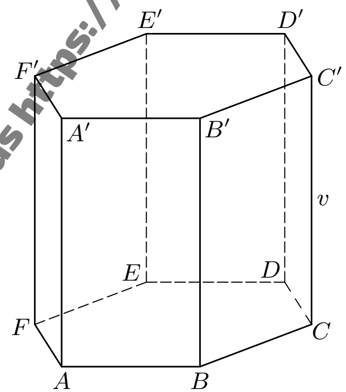
Závěr: Vzdálenost míst U a V je přibližně 347 metrů.

Přehled značení:

V ... objem tělesa
S ... povrch tělesa
S_{p} ... obsah podstavy (popř. S_{p_1}, S_{p_2})
S_{pl} ... obsah pláště
v ... výška tělesa
s ... stěnová výška
u_{s} ... stěnová úhlopříčka
u_{t} ... tělesová úhlopříčka
r ... poloměr podstavy
d ... průměr podstavy

Hranol (**pravidelný n-boký**, je-li jeho podstavou pravidelný n-úhelník; **kolmý**, jsou-li jeho boční hrany kolmé k podstavě)

$$V = S_{\mathrm{p}} \cdot v$$
$$S = 2S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}}$$



Kvádr (kolmý hranol, jehož podstavou je obdélník)

$$V = abc$$
$$S = 2(ab + ac + bc)$$
$$u_{\mathrm{s}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$u_{\mathrm{t}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$