

OBSAH

Předmluva ke třetímu, přepracovanému vydání	5
1 Algebraické výrazy	7
2 Kvadratické rovnice	17
3 Soustavy rovnic	28
4 Lineární rovnice s parametrem	37
5 Rovnice s neznámou pod odmocninou	47
6 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice	56
7 Kvadratické nerovnice	66
8 Rovnice a nerovnice v součinném nebo podřílovém tvaru	76
9 Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami	83
10 Kvadratické rovnice s parametrem	93
11 Exponenciální rovnice	102
12 Logaritmické rovnice	111
13 Goniometrické rovnice	121
14 Řešení některých typů rovnic substitucí	130
15 Komplexní čísla	139
16 Řešení binomických a kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel	155
17 Lineární funkce, lineární lomené funkce	163
18 Kvadratické funkce, grafické řešení kvadratických rovnic a nerovnic	175
19 Mocniny a mocninne funkce. Odmocniny	186
20 Exponenciální a logaritmické funkce	197
21 Goniometrické funkce	208
22 Grafy funkcí s absolutními hodnotami	217
23 Aplikace goniometrických vzorců	229
24 Řešení trojúhelníku a čtyřúhelníku užitím trigonometrie	237
25 Užití trigonometrie v úlohách z praxe	247
26 Výroky	256
27 Množiny a Vennovy diagramy	265
28 Základní typy důkazů	281
29 Úlohy na aplikaci Pythagorovy věty a Euklidových vět	292

30	Konstrukční úlohy	301
31	Shodná zobrazení v rovině	320
32	Podobná zobrazení v rovině	333
33	Polohové vlastnosti útvarů v prostoru	347
34	Metrické vlastnosti útvarů v prostoru	352
35	Objemy a povrchy těles	361
36	Operace s vektory	370
37	Polohové úlohy řešené analytickou metodou	380
38	Odchyšky přímek a rovin řešené analytickou metodou	392
39	Výpočet vzdálenosti analytickou metodou	400
40	Kružnice, kruh, kulová plocha a koule	410
41	Elipsa	419
42	Hyperbola	429
43	Parabola	439
44	Vyšetřování množin bodů v rovině	445
45	Posloupnosti	455
46	Aritmetická posloupnost	465
47	Geometrická posloupnost	473
48	Užití geometrických posloupností	480
49	Nekonečné řady	489
50	Variace, permutace	499
51	Kombinace	507
52	Operace s kombinacemi čísel a s faktoriály	515
53	Binomická věta	522
54	Pravděpodobnost	529
55	Limita funkce	543
56	Derivace funkce	561
57	Určení extrémů funkce a vyšetření průběhu funkce	572
58	Slovní úlohy na extrémy funkcí	585
59	Primitivní funkce	602
60	Určitý integrál	610
	Použité matematické symboly a značky	626
	Seznam literatury	631

Předmluva ke třetímu, přepracovanému vydání

Milí studenti středních škol,

Řešené maturitní úlohy z matematiky jsou určeny vám, studentům všech typů středních škol, k předmaturitnímu opakování matematiky a k přípravě na přijímací zkoušky na vysoké školy.

Publikace je rozčleněna do šedesáti kapitol, které odpovídají maturitním tematickým okruhům. Každá kapitola má dvě části. První část obsahuje řešené úlohy, v druhé části je zadání dalších úloh vhodných k samostatnému procvičení učiva, které je doplněno výsledky, a u obtížnějších úloh je uveden i stručný návod k řešení. Samostatnou přípravu k maturitní zkoušce vám usnadní především řešené úlohy, v nichž se můžete seznámit s metodami řešení matematických úloh, s různými postupy řešení těžké úlohy i s racionálním a účelným zápisem řešení. Součástí řešených úloh je komentář, v němž jsou objasněny myšlenkové postupy řešení. Úlohy jsou voleny tak, aby umožnily zopakování a procvičení jednotlivých tematických celků a aby současně byla zvýrazněna systemizace učiva, tj. vytváření systému z již osvojených témat s důrazem na souvislosti jednotlivých partií matematiky. Proto najdete v této publikaci vedle obvyklých typů maturitních úloh i řadu úloh netradičních a dostatečné množství úloh komplexního charakteru. Obtížnější úlohy, které jsou určeny především studentům ze tříd gymnázií zaměřených na matematiku nebo na matematiku a fyziku, jsou označeny hvězdičkou.

Třetí vydání bylo přepracováno tak, aby svým obsahem odpovídalo současně platným učebním osnovám matematiky pro gymnázia.

Protože většina z vás nemá v období předmaturitní přípravy k dispozici všechny učebnice matematiky, doporučuji spolu s *Řešenými maturitními úlohami z matematiky* použít publikaci *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách* (viz seznam literatury – publikace [12]).

V ní najdete všechny potřebné vzorce, důležité definice a věty přehledně uspořádané podle jednotlivých témat, tedy veškerou potřebnou „teorii“ středoškolské matematiky.

Upřímně děkuji recenzentům RNDr. Dagu Hrubému a RNDr. Jurovi Charvátovi, CSc., za jejich připomínky, které přispěly k výraznému zlepšení obsahu i metodického zpracování publikace.

Věřím, že práce s *Řešenými maturitními úlohami z matematiky* zefektivní vaši přípravu k maturitní zkoušce a současně vám poskytne dobrou přípravu k úspěšnému studiu na vysoké škole.

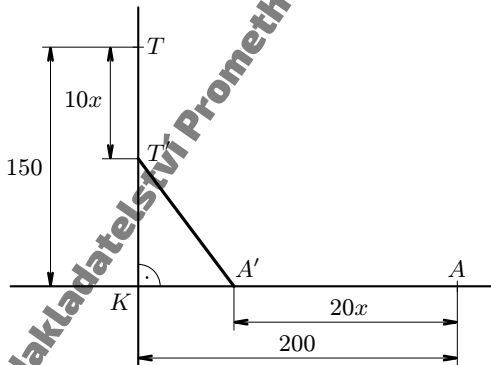
Duben 1999

Autor

Zkoušku provedeme tak, že ověříme, zda čísla 48 a 72 jako číselné hodnoty rychlostí aut v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ splňují všechny podmínky úlohy. Rozdíl rychlostí je zřejmě $24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Nákladní auto při průměrné rychlosti $48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ujede dráhu 48 km za 1 h. Osobní auto při průměrné rychlosti $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ujede dráhu 48 km za dobu $\frac{48 \text{ km}}{72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = \frac{2}{3} \text{ h}$. Osobní auto skutečně ujede dráhu 48 km o $\frac{1}{3} \text{ h}$ (tj. o 20 minut) dříve než nákladní auto.

Odpověď: Průměrná rychlost nákladního auta je $48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, průměrná rychlost osobního auta je $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2.2 Dvě přímé silnice se protínají v pravém úhlu. Po jedné z nich jede traktor průměrnou rychlostí $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, po druhé jede osobní auto průměrnou rychlostí $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V čase $t_0 = 0 \text{ s}$ je traktor 150 m a auto 200 m před křižovatkou těchto silnic, přitom obě vozidla se pohybují směrem ke křižovatce. Určete čas t , ve kterém je vzdálenost vozidel 100 m.



Obr. 2.1

Řešení. V čase $t_0 = 0 \text{ s}$ je auto v místě A , traktor v místě T (viz obr. 2.1). V čase $t = x \text{ s}$ bude auto v místě A' a traktor v místě T' , přitom $|A'T'| = 100$. V pravoúhlém trojúhelníku $A'T'K$ platí podle Pythagorovy věty

$$|A'T'|^2 = |A'K|^2 + |T'K|^2,$$

5.4 Řešte v \mathbb{R} rovnici $\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1 + \sqrt{x}$.

Řešení. Řešíme důsledkovými úpravami.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1 + \sqrt{x}$$

$$x+3-4\sqrt{1-x} = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

$$-4\sqrt{1-x} = -2 + 2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{x}$$

$$4(1-x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$2\sqrt{x} = 5x - 3$$

$$4x = 25x^2 - 30x + 9$$

$$25x^2 - 34x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9}}{50} = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 900}}{50} = \frac{34 \pm 16}{50}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{9}{25}$$

Zkouška:

Pro $x_1 = 1$:

$$l(1) = \sqrt{1+3-4\sqrt{1-1}} = \sqrt{4-4 \cdot 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$p(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

$$l(1) = p(1)$$

Číslo 1 je kořenem dané rovnice.

Pro $x_2 = \frac{9}{25}$:

$$l\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{\frac{9}{25} + 3 - 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \sqrt{\frac{9+75}{25} - 4 \cdot \sqrt{\frac{25-9}{25}}} = \\ = \sqrt{\frac{84}{25} - 4 \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{84-80}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$p\left(\frac{9}{25}\right) = 1 + \sqrt{\frac{9}{25}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$l\left(\frac{9}{25}\right) \neq p\left(\frac{9}{25}\right)$$

Číslo $\frac{9}{25}$ není kořenem dané rovnice.

Závěr: Jediným kořenem dané rovnice je číslo 1.

*13.19 Řešte v $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{2}{3}\pi \\ \sin x + \sin y &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\left[(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi\right), (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) \right]$$

*13.20 Určete velikosti x, y ostrých úhlů vyhovující podmínkám:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos y &= \sqrt{3} \\ \cos x + \sin y &= 1\end{aligned}$$

$$\left[\text{Uplatněte, že } \cos y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - y\right) \text{ a } \sin y = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - y\right). \right. \\ \left. (x, y) = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi\right) \right]$$

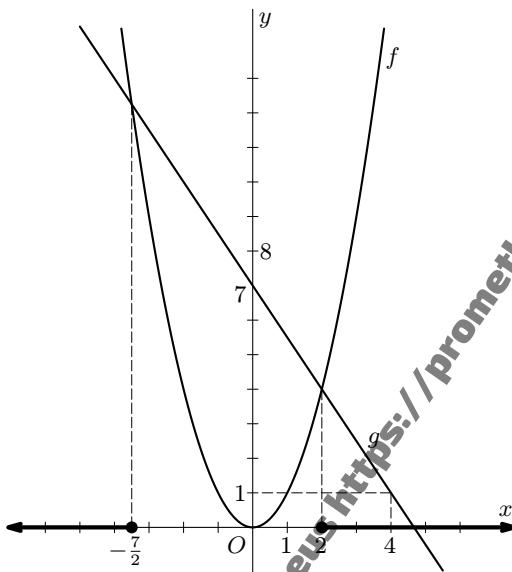
14 ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TYPŮ ROVNIC SUBSTITUCÍ

Poznámka. Metodou substituce jsme již řešili řadu úloh v předcházejících kapitolách, především v tématech *Exponenciální rovnice*, *Logaritmické rovnice* a *Goniometrické rovnice*. Uvedeme nyní další úlohy, v jejichž řešení je substituce vhodnou metodou.

14.1 Řešte v \mathbb{R} rovnici $\sqrt{\frac{7-x}{3+x}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{3+x}{7-x}} = 4$.

Řešení. Substitucí $\sqrt{\frac{7-x}{3+x}} = z$ získáme rovnici $z + \frac{3}{z} = 4$ a po úpravě kvadratickou rovnicí $z^2 - 4z + 3 = 0$ s kořeny $z_1 = 3$, $z_2 = 1$. Pro původní neznámou x tedy řešíme rovnice

$$\sqrt{\frac{7-x}{3+x}} = 3 \quad \text{a} \quad \sqrt{\frac{7-x}{3+x}} = 1.$$



Obr. 18.7

Poznámka. Jiný způsob použití grafů kvadratických funkcí při řešení kvadratických nerovnic byl již uveden v kapitole 7, která má název *Kvadratické nerovnice*, v příkladech 7.1 (3. způsob řešení), 7.2, 7.3 a 7.4.

- 18.4** a) Určete, pro která reálná čísla b nemá graf kvadratické funkce $f: y = x^2 + bx + 1$ žádný společný bod s osou x .
- b) Zapište kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body $A[2, 0]$, $B[-1, \frac{3}{2}]$, $C[1, -\frac{7}{2}]$.

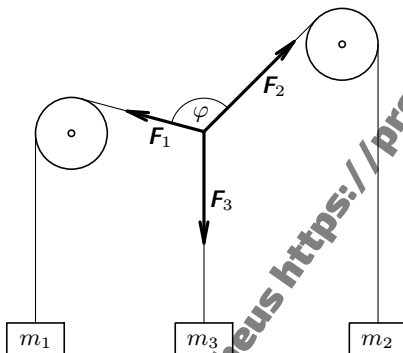
Řešení

- a) Parabola, která je grafem funkce f , nemá žádný společný bod s osou x právě tehdy, když diskriminant D kvadratické rovnice $x^2 + bx + 1 = 0$ je záporné číslo. Diskriminant této rovnice je $D = b^2 - 4$, řešíme tedy nerovnici

$$b^2 - 4 < 0.$$

25 UŽITÍ TRIGONOMETRIE V ÚLOHÁCH Z PRAXE

25.1 Na kladkách jsou způsobem znázorněným na obr. 25.1 zavěšena tři závaží, jejichž hmotnosti jsou $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 0,8$ kg, $m_3 = 0,7$ kg. Určete velikost úhlu φ , který svírají síly F_1 a F_2 , víte-li, že síly F_1 , F_2 , F_3 jsou v rovnováze. (Velikost tíhového zrychlení je $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.)



Obr. 25.1

Řešení. Síly F_1 , F_2 , F_3 jsou v rovnováze, to znamená, že

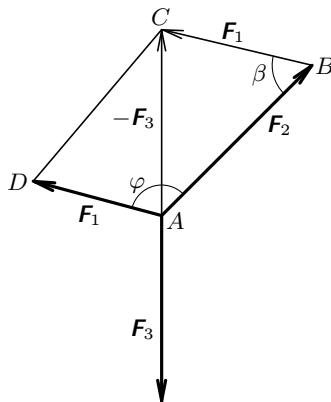
$$F_1 + F_2 + F_3 = \mathbf{o},$$

tj.

$$F_1 + F_2 = -F_3,$$

jak ukazují obr. 25.2.

V rovnoběžníku sil na obr. 25.2 máme určit velikost φ úhlu DAB . Velikosti uvažovaných sil jsou $F_1 = 5$ N, $F_2 = 8$ N, $F_3 = 7$ N. V trojúhelníku ABC tedy známe délky všech tří stran, $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 7$, proto dovedeme vypočítat velikost libovolného



Obr. 25.2

2. Protože $|AA_0| = v_a$, leží bod A_0 na kružnici $k_2(A; v_a)$.

Z toho vyplývá, že

$$A_0 \in k_1 \cap k_2.$$

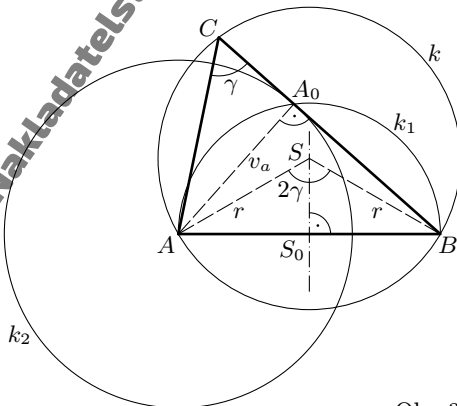
Určením bodu A_0 získáme druhou množinu bodů, do níž patří bod C , a to polopřímku BA_0 .

Bod C je vrcholem trojúhelníku ABC , jestliže je různý od bodu B a zároveň platí:

$$\left. \begin{array}{l} 1. C \in k(S; r) \\ 2. C \in \mapsto BA_0 \end{array} \right\} \implies C \in k \cap \mapsto BA_0$$

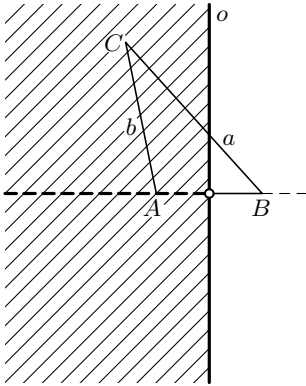
Konstrukce (pro $r = 2 \text{ cm}$, $v_a = 2,3 \text{ cm}$, $\gamma = \frac{1}{3}\pi$, viz obr. 30.13):

1. k ; $k(S; r)$
2. A ; $A \in k$ (A je libovolný bod kružnice k)
3. $\triangle ABS$; podle věty *sus* ($|AS| = |BS| = r$, $|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$)
4. k_1 ; $k_1 = \{X \in \mapsto ABS : |\sphericalangle AXB| = \frac{1}{2}\pi\}$
5. k_2 ; $k_2(A; v_a)$
6. A_0 ; $A_0 \in k_1 \cap k_2$
7. $\mapsto BA_0$
8. C ; $C \in \mapsto BA_0 \cap k \wedge C \neq B$
9. $\triangle ABC$

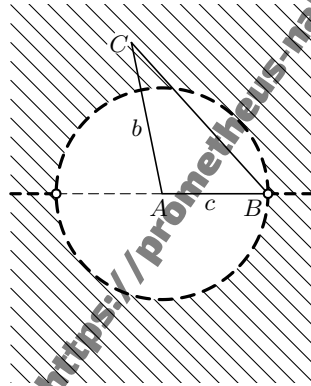


Obr. 30.13

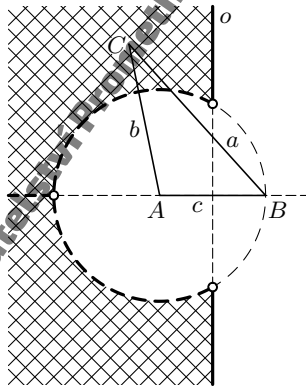
$\alpha \geq \beta \iff a \geq b$; množinou vrcholů C všech trojúhelníků ABC , pro něž platí $\alpha \geq \beta$, je polorovina oA s výjimkou bodů přímky AB ,



Obr. 44.1



Obr. 44.2



Obr. 44.3

2. Vyšetříme množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC , pro něž platí $\beta > \gamma$ (viz obr. 44.2).

$\beta = \gamma \iff b = c$; množinou vrcholů C všech trojúhelníků ABC , pro něž platí $\beta = \gamma$, je kružnice $k(A; c)$ s výjimkou bodů A, B .

57.4 Najděte globální extrémý funkce $f: y = x^4 - 2x^3 + 1$

- a) v intervalu $(1, 2)$, b) v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$,
 c) v množině \mathbb{R} .

Řešení

a) Zjistíme, ve kterých částech intervalu $(1, 2)$ je daná funkce rostoucí a ve kterých částech tohoto intervalu je klesající. Z toho pak snadno určíme hledané globální extrémý.

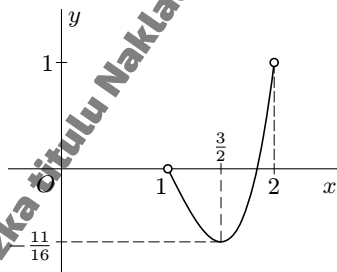
První derivace funkce f je

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3).$$

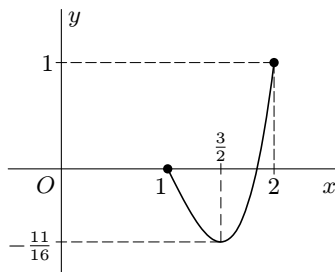
Odtud vidíme, že funkce f má dva stacionární body 0 a $\frac{3}{2}$, z nichž pouze druhý patří do intervalu $(1, 2)$. Protože funkce f' je spojitá v \mathbb{R} , a tedy i v $(1, 2)$, nemění v intervalech $(1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 2)$ znaménko. Podobně jako v úlohách 57.1 a 57.2 sestavíme tabulku:

$(1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Podle věty 1 z úlohy 57.1 je funkce f v intervalu $(1, \frac{3}{2})$ klesající a v intervalu $\langle \frac{3}{2}, 2 \rangle$ rostoucí. Její graf v otevřeném intervalu $(1, 2)$ je sestrojen na obr. 57.1.

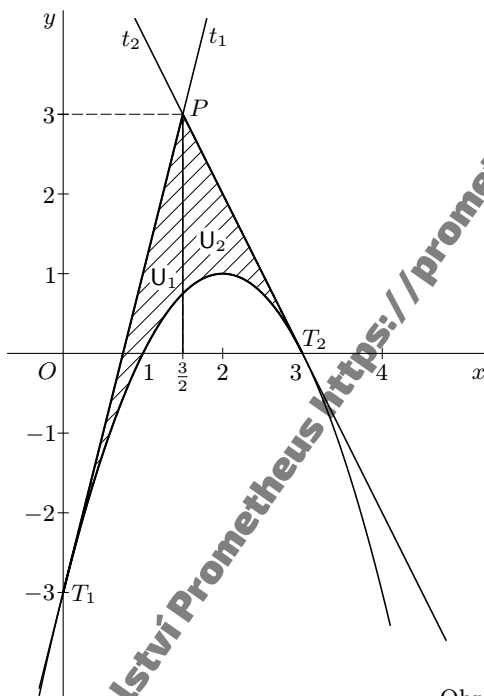


Obr. 57.1



Obr. 57.2

60.3 Vypočtete obsah útvaru U , který je ohraničený parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $T_1[0, -3]$ a $T_2[3, 0]$.



Obr. 60.3

Řešení. Útvar, jehož obsah máme určit, je znázorněn na obr. 60.3. Rovnice tečen zapíšeme jako rovnice přímek určených dotykovými body a směrnicemi. Směrnice tečny dané parabolou v bodě $[x, y(x)]$ je

$$k = y'(x) = -2x + 4.$$

Proto směrnice tečny t_1 dané parabolou v bodě $T_1[0, -3]$ je $k_1 = 4$ a směrnice tečny t_2 dané parabolou v bodě $T_2[3, 0]$ je $k_2 = -2$. Rovnice tečen jsou

$$\begin{aligned} t_1: y + 3 &= 4x, & \text{tj. } y &= 4x - 3, \\ t_2: y &= -2(x - 3), & \text{tj. } y &= -2x + 6. \end{aligned}$$