OBSAH

Předmluva ke třetímu, přepracovanému vydání

Milí studenti středních škol,

Řešené maturitní úlohy z matematiky jsou určeny vám, studentům všech typů středních škol, k předmaturitnímu opakování matematiky a k přípravě na přijímací zkoušky na vysoké školy.

Publikace je rozčleněna do šedesáti kapitol, které odpovídají maturitním tematickým okruhům. Každá kapitola má dvě části. První část obsahuje řešené úlohy, v druhé části je zadání dalších úloh vhodných k samostatnému procvičení učiva, které je doplněno výsledky, a u obtížnějších úloh je uveden i stručný návod k řešení. Samostatnou přípravu k maturitní zkoušce vám usnadní především řešené úlohy, v nichž se můžete seznámit s metodami řešení matematických úloh, s různými postupy řešení téže úlohy i s racionálním a účelným zápisem řešení. Součástí řešených úloh je komentář, v němž jsou objasněny myšlenkové postupy řešení. Úlohy jsou voleny tak, aby umožnily zopakování a procvičení jednotlivých tematických celků a aby současně byla zvýrazněna systemizace učiva, tj. vytváření systému z již osvojených témat s důrazem na souvislosti jednotlivých partií matematiky. Proto najdete v této publikaci vedle obvyklých typů maturitních úloh i řadu úloh netradičních a dostatečné množství úloh komplexního charakteru. Obtížnější úlohy, které jsou určeny především studentům ze tříd gymnázií zaměřených na matematiku nebo na matematiku a fyziku, jsou označeny hvězdičkou.

Třetí vydání bylo přepracováno tak, aby svým obsahem odpovídalo současně platným učebním osnovám matematiky pro gymnázia.

Protože většina z vás nemá v období předmaturitní přípravy k dispozici všechny učebnice matematiky, doporučuji spolu s *Řešenými maturitními úlohami z matematiky* použít publikaci *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách* (viz seznam literatury – publikace [12]).

V ní najdete všechny potřebné vzorce, důležité definice a věty přehledně uspořádané podle jednotlivých témat, tedy veškerou potřebnou „teorii“ středoškolské matematiky.

Upřímně děkuji recenzentům RNDr. Dagu Hrubému a RNDr. Jurovi Charvátovi, CSc., za jejich připomínky, které přispěly k výraznému zlepšení obsahu i metodického zpracování publikace.

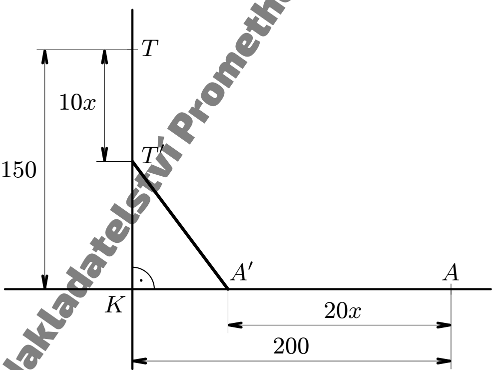
Věřím, že práce s *Řešenými maturitními úlohami z matematiky* zefektivní vaši přípravu k maturitní zkoušce a současně vám poskytne dobrou přípravu k úspěšnému studiu na vysoké škole.

Duben 1999 Autor

Zkoušku provedeme tak, že ověříme, zda čísla 48 a 72 jako číselné hodnoty rychlostí aut v $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ splňují všechny podmínky úlohy. Rozdíl rychlostí je zřejmě $24\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Nákladní auto při průměrné rychlosti $48\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ujede dráhu $48\,\mathrm{km}$ za $1\,\mathrm{h}$. Osobní auto při průměrné rychlosti $72\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ujede dráhu $48\,\mathrm{km}$ za dobu $\dfrac{48\,\mathrm{km}}{72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = \dfrac{2}{3}\ \mathrm{h}$. Osobní auto skutečně ujede dráhu $48\,\mathrm{km}$ o $\dfrac{1}{3}\ \mathrm{h}$ (tj. o 20 minut) dříve než nákladní auto.

Odpověď: Průměrná rychlost nákladního auta je $48\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, průměrná rychlost osobního auta je $72\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

2.2 Dvě přímé silnice se protínají v pravém úhlu. Po jedné z nich jede traktor průměrnou rychlostí $10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, po druhé jede osobní auto průměrnou rychlostí $20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ je traktor $150\,\mathrm{m}$ a auto $200\,\mathrm{m}$ před křižovatkou těchto silnic, přitom obě vozidla se pohybují směrem ke křižovatce. Určete čas t, ve kterém je vzdálenost vozidel $100\,\mathrm{m}$.



Obr. 2.1

Řešení. V čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ je auto v místě A, traktor v místě T (viz obr. 2.1). V čase $t = x\,\mathrm{s}$ bude auto v místě A' a traktor v místě T', přitom $|A'T'| = 100$. V pravoúhlém trojúhelníku $A'T'K$ platí podle Pythagorovy věty

$$|A'T'|^2 = |A'K|^2 + |T'K|^2,$$

5.4 Řešte v R rovnici $\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1+\sqrt{x}$.

Řešení. Řešíme důsledkovými úpravami.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} &= 1+\sqrt{x} \\
x+3-4\sqrt{1-x} &= 1+2\sqrt{x}+x \\
-4\sqrt{1-x} &= -2+2\sqrt{x} \\
2\sqrt{1-x} &= 1-\sqrt{x} \\
4(1-x) &= 1-2\sqrt{x}+x \\
2\sqrt{x} &= 5x-3 \\
4x &= 25x^2-30x+9 \\
25x^2-34x+9 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2-4\cdot 25\cdot 9}}{50} = \frac{34 \pm \sqrt{1156-900}}{50} = \frac{34 \pm 16}{50}$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \tfrac{9}{25}$$

Zkouška:

Pro $x_1 = 1$:

$$l(1) = \sqrt{1+3-4\sqrt{1-1}} = \sqrt{4-4\cdot 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$p(1) = 1+\sqrt{1} = 2$$

$$l(1) = p(1)$$

Číslo 1 je kořenem dané rovnice.

Pro $x_2 = \frac{9}{25}$:

$$l\left(\tfrac{9}{25}\right) = \sqrt{\tfrac{9}{25}+3-4\cdot\sqrt{1-\tfrac{9}{25}}} = \sqrt{\tfrac{9+75}{25}-4\cdot\sqrt{\tfrac{25-9}{25}}} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{84}{25}-4\cdot\tfrac{4}{5}} = \sqrt{\tfrac{84-80}{25}} = \sqrt{\tfrac{4}{25}} = \tfrac{2}{5}$$

$$p\left(\tfrac{9}{25}\right) = 1+\sqrt{\tfrac{9}{25}} = 1+\tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{5}$$

$$l\left(\tfrac{9}{25}\right) \neq p\left(\tfrac{9}{25}\right)$$

Číslo $\frac{9}{25}$ není kořenem dané rovnice.

Závěr: Jediným kořenem dané rovnice je číslo 1.

***13.19** Řešte v $\langle 0, 2\pi) \times \langle 0, 2\pi)$ soustavu rovnic:

$$x + y = \tfrac{2}{3}\pi$$
$$\sin x + \sin y = \tfrac{3}{2}$$

[$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi\right)$, $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$]

***13.20** Určete velikosti x, y ostrých úhlů vyhovující podmínkám:

$$\sin x + \cos y = \sqrt{3}$$
$$\cos x + \sin y = 1$$

[Uplatněte, že $\cos y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - y\right)$ a $\sin y = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - y\right)$.
$(x, y) = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi\right)$]

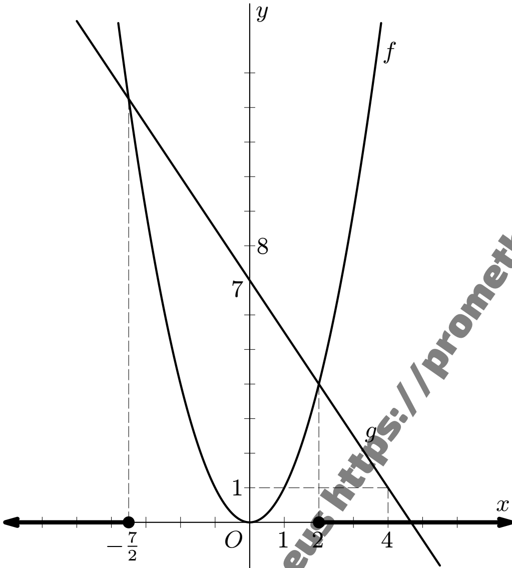
14 ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TYPŮ ROVNIC SUBSTITUCÍ

Poznámka. Metodou substituce jsme již řešili řadu úloh v předcházejících kapitolách, především v tématech *Exponenciální rovnice*, *Logaritmické rovnice* a *Goniometrické rovnice*. Uvedeme nyní další úlohy, v jejichž řešení je substituce vhodnou metodou.

14.1 Řešte v R rovnici $\sqrt{\dfrac{7-x}{3+x}} + 3 \cdot \sqrt{\dfrac{3+x}{7-x}} = 4.$

Řešení. Substitucí $\sqrt{\dfrac{7-x}{3+x}} = z$ získáme rovnici $z + \dfrac{3}{z} = 4$ a po úpravě kvadratickou rovnici $z^2 - 4z + 3 = 0$ s kořeny $z_1 = 3$, $z_2 = 1$. Pro původní neznámou x tedy řešíme rovnice

$$\sqrt{\frac{7-x}{3+x}} = 3 \qquad \text{a} \qquad \sqrt{\frac{7-x}{3+x}} = 1.$$



Obr. 18.7

Poznámka. Jiný způsob použití grafů kvadratických funkcí při řešení kvadratických nerovnic byl již uveden v kapitole 7, která má název *Kvadratické nerovnice*, v příkladech 7.1 (3. způsob řešení), 7.2, 7.3 a 7.4.

18.4 a) Určete, pro která reálná čísla b nemá graf kvadratické funkce $f\colon\ y = x^2 + bx + 1$ žádný společný bod s osou x.

b) Zapište kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body $A[2, 0]$, $B\left[-1, \frac{3}{2}\right]$, $C\left[1, -\frac{7}{2}\right]$.

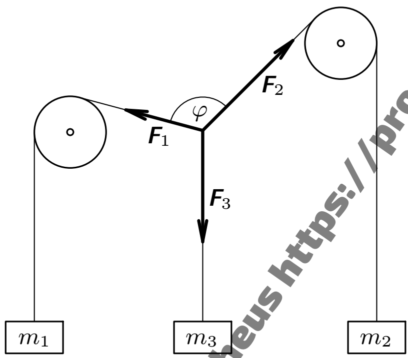
Řešení

a) Parabola, která je grafem funkce f, nemá žádný společný bod s osou x právě tehdy, když diskriminant D kvadratické rovnice $x^2 + bx + 1 = 0$ je záporné číslo. Diskriminant této rovnice je $D = b^2 - 4$, řešíme tedy nerovnici

$$b^2 - 4 < 0.$$

25 UŽITÍ TRIGONOMETRIE V ÚLOHÁCH Z PRAXE

25.1 Na kladkách jsou způsobem znázorněným na obr. 25.1 zavěšena tři závaží, jejichž hmotnosti jsou $m_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 0{,}8\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 0{,}7\,\mathrm{kg}$. Určete velikost úhlu φ, který svírají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, víte-li, že síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ jsou v rovnováze. (Velikost tíhového zrychlení je $10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)



Obr. 25.1

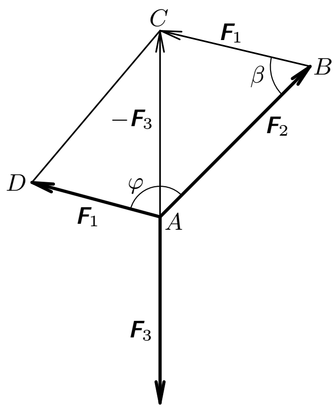
Řešení. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ jsou v rovnováze, to znamená, že

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{o},$$

tj.

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_3,$$

jak ukazuje obr. 25.2.



Obr. 25.2

V rovnoběžníku sil na obr. 25.2 máme určit velikost φ úhlu DAB. Velikosti uvažovaných sil jsou $F_1 = 5\,\mathrm{N}$, $F_2 = 8\,\mathrm{N}$, $F_3 = 7\,\mathrm{N}$. V trojúhelníku ABC tedy známe délky všech tří stran, $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 7$, proto dovedeme vypočítat velikost libovolného

2. Protože $|AA_0| = v_a$, leží bod A_0 na kružnici $k_2(A;\, v_a)$.

Z toho vyplývá, že

$$A_0 \in k_1 \cap k_2.$$

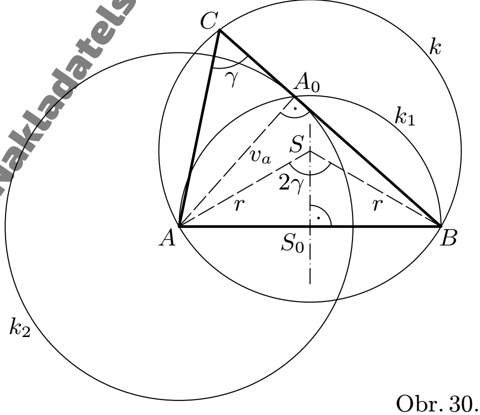
Určením bodu A_0 získáme druhou množinu bodů, do níž patří bod C, a to polopřímku BA_0.

Bod C je vrcholem trojúhelníku ABC, jestliže je různý od bodu B a zároveň platí:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ C \in k(S;\, r) \\ 2.\ C \in \mapsto BA_0 \end{array}\right\} \implies C \in k \cap \mapsto BA_0$$

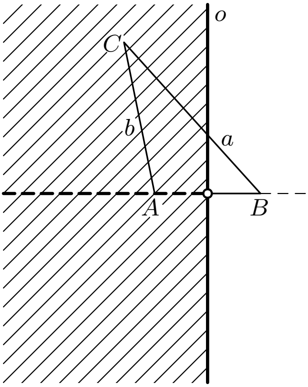
K o n s t r u k c e (pro $r = 2\,\text{cm}$, $v_a = 2{,}3\,\text{cm}$, $\gamma = \frac{1}{3}\pi$, viz obr. 30.13):

1. k; $k(S;\, r)$
2. A; $A \in k$ (A je libovolný bod kružnice k)
3. $\triangle ABS$; podle věty *sus* ($|AS| = |BS| = r$, $|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$)
4. k_1; $k_1 = \left\{X \in \mapsto ABS\colon\ |\sphericalangle AXB| = \frac{1}{2}\pi\right\}$
5. k_2; $k_2(A;\, v_a)$
6. A_0; $A_0 \in k_1 \cap k_2$
7. $\mapsto BA_0$
8. C; $C \in \mapsto BA_0 \cap k \ \wedge\ C \neq B$
9. $\triangle ABC$

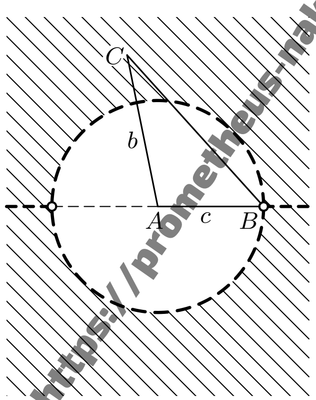


Obr. 30.13

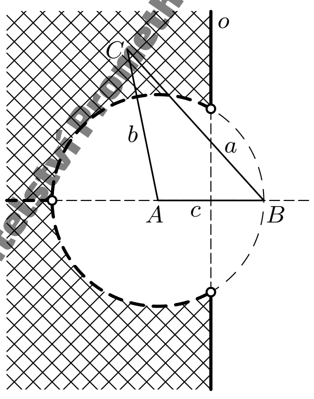
$\alpha \geqq \beta \iff a \geqq b$; množinou vrcholů C všech trojúhelníků ABC, pro něž platí $\alpha \geqq \beta$, je polorovina oA s výjimkou bodů přímky AB.



Obr. 44.1



Obr. 44.2



Obr. 44.3

2. Vyšetříme množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, pro něž platí $\beta > \gamma$ (viz obr. 44.2).
$\beta = \gamma \iff b = c$; množinou vrcholů C všech trojúhelníků ABC, pro něž platí $\beta = \gamma$, je kružnice $k(A; c)$ s výjimkou bodů A, B.

57.4 Najděte globální extrémy funkce $f\colon\ y = x^4 - 2x^3 + 1$

a) v intervalu $(1, 2)$,

b) v intervalu $\langle 1, 2\rangle$,

c) v množině R.

Řešení

a) Zjistíme, ve kterých částech intervalu $(1, 2)$ je daná funkce rostoucí a ve kterých částech tohoto intervalu je klesající. Z toho pak snadno určíme hledané globální extrémy.

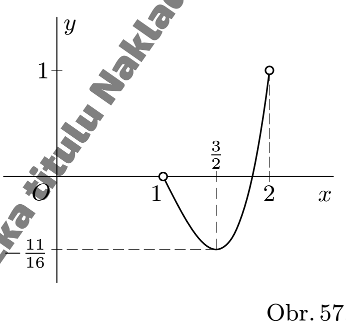
První derivace funkce f je

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3).$$

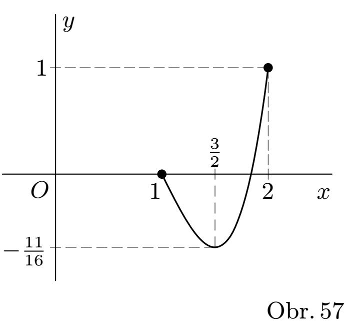
Odtud vidíme, že funkce f má dva stacionární body 0 a $\frac{3}{2}$, z nichž pouze druhý patří do intervalu $(1, 2)$. Protože funkce f' je spojitá v R, a tedy i v $(1, 2)$, nemění v intervalech $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ znaménko. Podobně jako v úlohách 57.1 a 57.2 sestavíme tabulku:

$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Podle věty 1 z úlohy 57.1 je funkce f v intervalu $\left(1, \frac{3}{2}\right\rangle$ klesající a v intervalu $\left\langle \frac{3}{2}, 2\right)$ rostoucí. Její graf v otevřeném intervalu $(1, 2)$ je sestrojen na obr. 57.1.

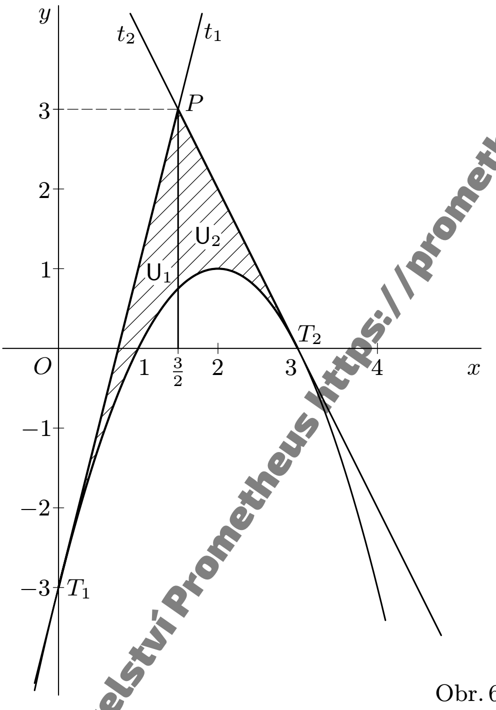


Obr. 57.1



Obr. 57.2

60.3 Vypočtěte obsah útvaru U, který je ohraničený parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $T_1[0, -3]$ a $T_2[3, 0]$.



Obr. 60.3

Řešení. Útvar, jehož obsah máme určit, je znázorněn na obr. 60.3. Rovnice tečen zapíšeme jako rovnice přímek určených dotykovými body a směrnicemi. Směrnice tečny dané paraboly v bodě $[x, y(x)]$ je

$$k = y'(x) = -2x + 4.$$

Proto směrnice tečny t_1 dané paraboly v bodě $T_1[0, -3]$ je $k_1 = 4$ a směrnice tečny t_2 dané paraboly v bodě $T_2[3, 0]$ je $k_2 = -2$. Rovnice tečen jsou

$$t_1: \ y + 3 = 4x, \qquad \text{tj.} \quad y = 4x - 3,$$
$$t_2: \ y = -2(x - 3), \qquad \text{tj.} \quad y = -2x + 6.$$